

**Några uppgifter inför Lappskrivning 2**  
Matematik Baskurs

- (1) Vilka av nedanstående påståenden är sanna?  
(a)  $\ln e^{\ln 3} = 3$ ;  
(b)  $\ln e^{\sin^2 x} + \ln e^{\cos^2 x} = 1$  för alla reella tal  $x$ ;  
(c)  $e^{2x} = (e^x)^2$  för alla tal  $x$ ;  
(d)  $\ln ab - \ln b = \ln a$  för alla positiva reella tal  $a, b$ ;  
(e)  $\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{b}{a} = 0$  för alla positiva reella tal  $a, b$ .  
Svar: falskt, sant, falskt, sant, sant
- (2) Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\ln x + \ln(x + 1) = \ln(x + 2)$ .  
Svar:  $x = \sqrt{2}$  (ej minus!)
- (3) Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $e^x + e^{x/2} = 1$ .  
Svar:  $x = \ln((3 - \sqrt{5})/2)$ .
- (4) Förenkla så långt som möjligt uttrycket  $\frac{(2^{1/6})^2(\sqrt{8})^3}{2^{1/4}\sqrt{32}}$ .  
Svar:  $2^{25/12}$ .
- (5) För vilka reella tal  $a, b$  är det sant att  $a^{\ln b} = b^{\ln a}$ ?  
Svar: För alla positiva reella  $a$  och  $b$ .
- (6) Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen  $f(x) = \sqrt{2 + 3x}$ . Avgör om  $f$  är inverterbar och bestäm i så fall inversen.  
Svar: Definitionsmängden är  $\{x \geq -2/3\}$ . Funktionen är inverterbar, och  $f^{-1}(x) = (x^2 - 2)/3, x \geq 0$ .
- (7) Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen  $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - x}}$ .  
Svar:  $D_f = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x \leq 2\}$  och  $V_f = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$ .
- (8) Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen  $f(x) = \sqrt{\ln(5x - 3x^2)}$ . Avgör om  $f$  är inverterbar och bestäm i så fall inversen.  
Svar: Definitionsmängden är  $\{(5 - \sqrt{13})/6 \leq x \leq (5 + \sqrt{13})/6\}$ . Inversen saknas (olika  $x$  kan ge samma funktionsvärde).
- (9) Du får veta följande om en funktion  $f : D_f = \mathbb{R}, V_f = \mathbb{R}, f$  är inverterbar och  $f(3) = 2$ . Beräkna  $f^{-1}(2)$ .  
Svar: 3

- (10) Beräkna  $\cos \frac{4711\pi}{3}$ .  
Svar:  $1/2$ .
- (11) Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos x = 1/2$ .  
Svar:  $x = \pm\pi/3 + 2\pi n$ ,  $n$  godtyckligt heltal.
- (12) Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\sin x = 1/2$ .
- (13) Finn alla reella tal  $x$  som löser ekvationen  $\cos(4x + \pi/3) = \cos(-32\pi/3)$ .  
Svar:  $x = \pi/12 + n\pi/2$ ,  $n$  godtyckligt heltal eller  $x = \pi/4 + n\pi/2$ ,  $n$  godtyckligt heltal.
- (14) Utgå från formeln  $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$  och härled formeln  $\sin 2v = (1 - \cos 2v)/2$ .
- (15) Bestäm  $\cos v$  och  $\tan v$  om  $\pi/2 < v < \pi$  och  $\sin v = 1/7$ .  
Svar:  $\cos v = -\sqrt{48}/7$  och  $\tan v = -1/\sqrt{48}$ .
- (16) Bestäm  $\cos x$  om  $\sin^2 x = 1/3$  och  $\pi/2 < x < \pi$ .  
Svar:  $-\sqrt{2/3}$ .
- (17) Skriv upp exakt fem olika lösningar till ekvationen  $\sin 3x = -1/\sqrt{2}$ .  
Svar: Välj till exempel fem av lösningarna  $x = -\pi/12 + k2\pi/3$ ,  $k$  heltal (det finns ännu fler). Dvs sätt in fem olika specifika heltal istället för  $k$ .
- (18) Lös ekvationen  $\sin 2x = \cos x$ .  
Svar:  $x = \pi/2 + k\pi$ ,  $k$  heltal, eller  $x = \pi/6 + k2\pi$ ,  $k$  heltal, eller  $x = 5\pi/6 + k2\pi$ ,  $k$  heltal.
- (19) Bestäm det största och det minsta värde som uttrycket  $a \cos x + b \sin x$  kan anta. Svaret kommer förstås att innehålla de reella talen  $a$  och  $b$ .  
Svar:  $\sqrt{a^2 + b^2}$  är största, och  $-\sqrt{a^2 + b^2}$  är minsta värdet.