

Tentamen i SF1659, Matematik Baskurs, 03-10-2011
Förslag till lösning.

Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 4 poäng vardera.

Uppgifterna 1 och 2 svarar mot varsin kontrollskrivning. Godkänt på kontrollskrivning nummer j får automatiskt 4 poäng på uppgift j (som då inte ska lösas).

Preliminära betygsgränser: A–31 poäng varav minst 8 VG poäng, B–26 poäng varav minst 5 VG poäng, C–21 poäng varav minst 2 VG poäng, D–17, E–15, Fx–13.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall din kursledare (Gunnel Roman eller Maria Saprykina).

Uppgifter som motsvarar varsin KS

1. Lös ekvationen $x^2 + |4x - 5| = 7$.

$$|4x - 5| = \begin{cases} 4x - 5, & x \geq \frac{5}{4} \\ 5 - 4x, & x < \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Case $x \geq \frac{5}{4}$:

$$x^2 + 4x - 5 = 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ eller } x = -6.$$

$x = -6$ ligger inte i intervallet $x \geq \frac{5}{4}$, det är ingen lösning.

$x = 2$ ligger i $x \geq \frac{5}{4}$; det är en lösning.

Case $x < \frac{5}{4}$:

$$x^2 - (4x - 5) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}.$$

$x = 2 + \sqrt{6}$ ligger inte i intervallet $x < \frac{5}{4}$, det är ingen lösning.

$x = 2 - \sqrt{6}$ ligger i $x < \frac{5}{4}$; det är en lösning.

Svar: $x = 2$ eller $x = 2 - \sqrt{6}$.

2. Lös ekvationerna:

2a). $3^{x+2} + 3^{2x+1} = 12 \Leftrightarrow 3^x 3^2 + 3(3^x)^2 = 12$.

Sätt $3^x = t$. Ekvationen blir $9t + 3t^2 = 12$. Rötterna är $t = 1$ och $t = -4$.

$3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $3^x = -4$ har ingen lösning.

Svar: $x = 0$.

2b). $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vi har två serier av lösningar:

1). $2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2). $2x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$2x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

G-uppgifter

3. Lös ekvationen $\frac{\ln(3x^2 + 13)}{\ln(2x + 1)} = 2$.

OBS: ekvationen har mening bara för $2x + 1 > 0$, dvs $x > -\frac{1}{2}$. Skriver om:

$$\ln(3x^2 + 13) = 2 \ln(2x + 1) \Leftrightarrow \ln(3x^2 + 13) = \ln(2x + 1)^2$$

Eftersom funktionen $\ln x$ är injektiv, detta är ekvivalent med

$$3x^2 + 13 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ eller } x = -6.$$

För $x = -6$ är $\ln(2x + 1)$ inte definierad. $x = 2$ är en lösning.

4. Bestäm koefficienten framför x i utvecklingen av $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{10}$, ($x \neq 0$).

$$\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x)^{10-k} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} x^{10-k} (-3)^k x^{-2k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} (-3)^k x^{10-3k}.$$

$$x^{10-3k} = x \Leftrightarrow 10 - 3k = 1 \Leftrightarrow k = 3.$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4.$$

$$\text{Koefficienten framför } x \text{ är } 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^7 (-3)^3 = -2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5.$$

5. Lös ekvationen $1 + \sqrt{2x} - \sqrt{x+7} = 0$.

$$1 + \sqrt{2x} = \sqrt{x+7}.$$

Kvadrerar:

$$(1 + \sqrt{2x})^2 = x + 7 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2x} + 2x = x + 7 \Leftrightarrow x - 6 = -2\sqrt{2x}.$$

Kvadrerar:

$$(x - 6)^2 = (-2\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 4 \cdot 2x \Leftrightarrow x^2 - 20x + 36 = 0.$$

$$x = 18 \text{ eller } x = 2.$$

$$\text{Verifierar rötterna: } x = 18 \text{ ger } 1 + \sqrt{36} - \sqrt{25} = 1 + 6 - 5 \neq 0. \quad x = 2 \text{ ger: } 1 + \sqrt{4} - \sqrt{9} = 0.$$

$$\text{Svar: } x = 2.$$

6. Lös ekvationen $\cos 2x + \sqrt{3} \sin x = -2$.

$$1 - 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = -2 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{3}{2} = 0.$$

Beteckna $t = \sin x$.

$$t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3} \text{ eller } t = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\sin x = t = \sqrt{3}$ ger inget svar.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ger: } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ eller } x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

VG-uppgifter

7. Lös olikheten

$$\begin{aligned} \frac{7x+2}{x+2} \geq 4x-x^2 &\Leftrightarrow \frac{7x+2+(x^2-4x)(x+2)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{x^3-2x^2-x+2}{x+2} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x+2} \geq 0. \end{aligned}$$

Uttrycket kan undersökas mha teckentabell. Svar: $x < -2$ eller $-1 \leq x \leq 1$ eller $x \geq 2$.

8. Uttryck $\cos(2 \arcsin x)$ som ett polynom i x . För vilka x gäller din formel?

Vi skriver om:

$$\cos(2 \arcsin x) = 1 - (2 \sin(\arcsin x))^2 = 1 - 2x^2$$

då $|x| \leq 1$.

9. Bevisa följande påstående (Viets sats). Om r_1 och r_2 är rötter till ekvationen $x^2 + ax + b = 0$, så gäller: $r_1 + r_2 = -a$, och $r_1 \cdot r_2 = b$.

Eftersom r_1 är en rot till polynomet $x^2 + ax + b$, så $x^2 + ax + b = (x - r_1)p_1(x)$ där $p_1(x)$ är en polynom av grad 1. Eftersom r_2 är också en rot, så $x^2 + ax + b = c(x - r_1)(x - r_2)$ för något konstant c . Multiplicera in: $c(x - r_1)(x - r_2) = cx^2 - c(r_1 + r_2)x + cr_1r_2 = 0$. Detta skall jämföras med $x^2 + ax + b = 0$.

Koefficienten framför x^2 är $c = 1$.

Koefficienten framför x är $a = -(r_1 + r_2) \Leftrightarrow r_1 + r_2 = -a$.

Konstanttermen är $b = r_1r_2$, v.s.b.