Lösningsförslag till KS3 i SF1602 2012-11-28

Modul 4, Uppgift 1

Låt funktionen $f(x)$ ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{då } x \leq 2, \\ 3, & \text{då } x > 2, \end{cases}$$

Beräkna för allmänt reellt x Riemann-integralen

$$\int_0^x f(t)dt.$$

Lösningsförslag:
För $x \leq 2$ behöver vi bara ta hänsyn till det område då $f(t) = t^2 + 1$. Integralen blir då

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t^2 + 1)dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^x = \frac{x^3}{3} + x.$$

Om $x > 2$ måste vi dela upp integralen i två intervall:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt = \int_0^2 (t^2 + 1)dt + \int_2^x 3dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^2 + \Big[3t\Big]_2^x =$$
$$= 3x - \frac{4}{3}.$$

Svar:

$$\text{Integralen blir} \begin{cases} \frac{x^3}{3} + x & \text{för } x \leq 2. \\ 3x - \frac{4}{3} & \text{för } x > 2. \end{cases}$$

Modul 4, Uppgift 2

Derivera funktionen

$$\int_0^{x^{1/3}} \frac{\sin(t^3)}{t^3} dt.$$

Lösningsförslag: Om

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

så gäller enligt analysens huvudsats att $F'(x) = f(x)$. Låt nu

$$f(t) = \frac{\sin(t^3)}{t^3}.$$

Enligt kedjeregeln

$$\frac{d}{dx}F(x^{1/3}) = F'(x^{1/3})\frac{d(x^{1/3})}{dx} = \frac{\sin(x^{3/3})}{x^{3/3}}\frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{\sin x}{3x^{5/3}}$$

vilket är den sökta derivatan.

Modul 5, Uppgift 1

Bestäm volymen på den rotationskropp som uppkommer då följande yta roterar kring y-axeln: Området begränsas av vertikala linjesegment, x-axeln, samt kurvan

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}, \qquad 1 \leq x \leq 2.$$

Lösningsförslag: Använd metoden för cylindriska skal. Vid positionen x tas ett cylindriskt skal med tjockleken dx ut. Detta har höjden y och vid rotation kring y-axeln blir omkretsen $2\pi x$. Således är volymen

$$dV = 2\pi xydx$$

Integrerat över det givna området får vi

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x(x+1)}}dx = \Big[\text{BETA 7.4.58.}\Big] = 2\pi \left[\sqrt{x(x+1)} - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})\right]_1^2 = \\ &= 2\pi \left(\sqrt{2(2+1)} - \ln(\sqrt{2} + \sqrt{2+1}) - \sqrt{1(1+1)} + \ln(\sqrt{1} + \sqrt{1+1})\right) = \\ &= 2\pi \left(\sqrt{6} - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\right) (\approx 4.84). \end{aligned}$$

Notera att det finns flera sätt att lösa integralen på. Till exempel kan man då få svaret på formen:

$$2\pi \left[\sqrt{x(x+1)} - \frac{1}{2}\ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)}\right)\right]_1^2 = 2\pi \left(\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{6}}\right)\right)$$

Modul 5, Uppgift 2

Beräkna längden på kurvbågen

$$y = \ln \frac{1}{1-x^2}, \qquad 0 \leq x \leq \frac{3}{4}.$$

Lösningsförslag: För en deriverbar funktion $y(x)$ så är kurvlängden L mellan $x = a$ och $x = b$ ges av integralen

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Beräkna först derivatan av y:

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1-x^2} = -\frac{d}{dx} \ln(1-x^2) = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Kurvlängden är då

$$L = \int_0^{3/4} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} dx = \int_0^{3/4} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{3/4} \left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx =$$
$$= \Big[-x + \ln(1+x) - \ln(1-x) \Big]_0^{3/4} = \ln 7 - \frac{3}{4}.$$