Lösningar KS 2010-12-01 (Modul 4)

1. (MODUL 4) Betrakta integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Existerar integralen i Riemann-mening? I generaliserad Riemann-mening? Om intgralen finns, räkna i så fall ut den.

Lösning:

Funktionen är obegränsad då $x \to 0$, alltså existerar ingen trappstegsfunktion $S(x)$ sådan att $S(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$ för alla $x \in [0, 1]$. Därför är funktionen inte integrerbar i Riemann-mening.

Integralen existerar dock i generaliserad Riemann-mening:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \{\text{per definition}\} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} (2 - \sqrt{\epsilon}) = 2$$

Alltså: Integralen EXISTERAR EJ i Riemann-mening. Den EXISTERAR i generaliserad Riemann-mening.

$$\boxed{\text{Svar: } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2}$$

2. (MODUL 4) Betrakta funktionen

$$F(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt$$

Avgör först var funktionen F är definierad. Beräkna därefter funktionens derivata.

Lösning:

Först noterar vi att funktionen inte är definierad för negativa x, då vi inte kan ha komplexa gränser på integralen. Eftersom $-1 \leq \cos(t^2) \leq 1$ för alla t, kommer integralen att existera för alla icke-negativa reella tal x. Dvs, för alla $x \geq 0$ är funktionen $F(x)$ definierad.

Låt $S(x)$ vara primitiva funktionen till $\cos(t^2)$, dvs $S'(x) = \cos(x^2)$. Vi har per definition:

$$F(x) = S(\sqrt{x}) - S(-\sqrt{x})$$

Nu använder vi kjedjeregeln för att derivera:

$$F'(x) = S'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + S'(-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F'(x) = \cos\left((\sqrt{x})^2\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos((-\sqrt{x})^2)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\text{Svar: } F'(x) = \cos(x)\tfrac{1}{\sqrt{x}}.\ F(x) \text{ är definierad för alla } x \geq 0.}$$