Lösningar KS 2010-12-01 (Modul 5)

1. (MODUL 5) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y' = (\cos x)(\sin y)$$

Lösning:

Ekvationen är separabel, och vi använder därför teorin för lösning av separabla differentialekvationer:

Dela med $\sin(y)$

$$\frac{y'}{\sin(y)} = \cos(x)$$

Finn primitiv funktion med avseende på x på båda sidorna:

$$\int \frac{y'(x)}{\sin(y(x))}dx = \int \cos(x)dx$$

1. För **vänsterledet** använder vi standardbytet:

$$\int \frac{y'(x)}{\sin(y(x))}dx = \int \frac{1}{\sin(y(x))}y'(x)dx = \left\{\frac{dy}{dx} = y'(x) \Rightarrow dy = y'(x)dx\right\} = \int \frac{1}{\sin(y)}dy$$

Variabelbytet $t = tan(\frac{y}{2})$ används:

$$\int \frac{1}{\sin(y)}dy = \left\{t = tan(\frac{y}{2}) \Rightarrow dy = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin(y) = \frac{2t}{1+t^2}\right\} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) + C_1$$

Vi byter tillbaka till y:

$$\int \frac{1}{\sin(y)}dy = \ln(t) + C_1 = \ln(\tan(\frac{y}{2})) + C_1$$

2. **Högerledet** är enklare:

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C_2$$

3. Låt $C_2 - C_1 = C$. Vi får då, **insatt i ekvationen**:

$$\ln(\tan(\frac{y}{2})) = \sin(x) + C$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{y}{2}) = e^{(\sin(x)+C)}$$

$$\boxed{\Rightarrow y(x) = 2\arctan(e^{(\sin(x)+C)}) \text{ där C är en reell konstant.}}$$

2. (MODUL 5) Berakna längden på kurvbågen

$$y = \sqrt{x}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Lösning:

Vi vill parametrisera kurvan, dvs definiera $x(t)$ och $y(t)$. Ett trick för att göra räkningarna enklare i detta fall är att sätta $y(t) = t$.

Detta ger då $x(t) = y(t)^2 = t^2$, och vi har:

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{Bmatrix} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{Bmatrix}$$

På så sätt slipper vi roten-ur-tecknet i parametriseringen.

Formeln för längden av en kurva:

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + 1} dt = \{s = 2t \Rightarrow ds = 2dt\} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{s^2+1} ds = \left\{ s + \sqrt{s^2+1} = t \Rightarrow s = \frac{t^2-1}{2t}, ds = \frac{t^2+1}{2t^2} dt \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{t^2+1}{2t}\frac{t^2+1}{2t^2} dt = \frac{1}{8}\int_1^{2+\sqrt{5}} t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} dt = \left[\frac{t^2}{2} + 2\ln(t) - \frac{1}{2t^2}\right]_1^{2+\sqrt{5}}$$

$$\approx 1.48$$

Svar: Längden på kurvbågen är 1.48 längdenheter.