Tentamensskrivning, 2012-12-10, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För betyg E krävs minst 4 av 6 moduler godkända (Del 1), och för betyg D krävs 5 av 6 moduler (Del 1). För högre betyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Betrakta funktionerna f och g, där

$$f(x) = \arcsin x, \qquad g(x) = \cos x.$$

(a) Ange definitionsmängd och värdemängd till funktionerna. Skissera dessutom funktionernas grafer.

(b) Betrakta funktionsuttrycken $f \circ g(x)$ och $g \circ f(x)$; skissera därefter graferna till dessa funktioner.

(a) För f blir definitionsmängden $[-1, 1]$ och värdemängden blir $[-\pi/2, \pi/2]$. För g blir definitionsmängden hela reella axeln $]-\infty, +\infty[$ medan värdemängden blir $[-1, 1]$. P g a tekniska svårigheter avstår vi här från att rita graferna.

(b) Uttrycket $f \circ g(x)$ blir $\pi/2 - |x|$ om $-\pi \leq x \leq \pi$, utvidgat periodiskt med period 2π. Uttrycket $g \circ f(x)$ blir $\sqrt{1 - x^2}$ för $-1 \leq x \leq 1$.

---

2. [MODUL 2] Bestäm konstanterna a och b så att

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } x \leq 1, \\ ax + b, & \text{då } x > 1, \end{cases}$$

blir deriverbar överallt.

Funktionen $f(x)$ blir deriverbar automatiskt utom i $x = 1$, eftersom den ges av polynomuttryck. För att vara deriverbar i $x = 1$ krävs först kontinuitet:

$$f(1) = 1 = \lim_{x \to 1^+} ax + b = a + b,$$

dvs $a + b = 1$. Dessutom måste höger- och vänster-derivatorna vara lika, dvs

$$2x\big|_{x=1} = a,$$

vilket ger $a = 2$. Då måste $b = -1$.

---

3. [MODUL 3] Vad blir

$$\int x \arctan x \, dx?$$

Du måste förklara din lösning noggrant, med angivande av metod.

Med hjälp av partiell integration erhålls

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

---

4. [MODUL 4] Beräkna derivatan av funktionen

$$F(x) = \int_0^{x^3} \frac{e^t - 1}{t} \, dt.$$

Vi inför funktionen

$$G(x) = \int_0^{x} \frac{e^t - 1}{t} \, dt.$$

Vi söker alltså derivatan av $F(x) = G(x^3)$. Enligt analysens huvudsats gäller att

$$G'(x) = \frac{e^x - 1}{x},$$

och kedjregeln ger således

$$F'(x) = \frac{e^{x^3} - 1}{x^3} 3x^2 = 3\frac{e^{x^3} - 1}{x}.$$

---

5. [MODUL 5] Bestäm volymen på de två kroppar som bildas då området

$$0 \leq y \leq xe^{-x}, \quad 0 \leq x < +\infty,$$

roteras kring x-axeln respektive kring y-axeln. Beskriv så gott det går med bilder hur kropparna ser ut.

Av tekniska skäl ritar vi ej kropparna.

Enligt skivformeln blir vid rotation runt x-axeln volymen för skivelementet $\pi(xe^{-x})^2 dx$, och vi får totala volymen

$$\pi \int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Vid rotation kring y-axeln skivar vi med cylindriska skal. Skalelementet får volymen $2\pi x dx \cdot xe^{-x}$, så den totala volymen blir

$$2\pi \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 4\pi.$$

---

6. [MODUL 6] Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorutveckling vid origo alltså) av grad 200 till funktionen $f(x) = \sin(x^{60})$. Uttryck dessutom resttermen i en form som kan användas vid numerisk tillämpning.

Vi betraktar först funktionen $g(x) = \sin x$, och observerar att $f(x) = g(x^{60})$. Maclaurinutveckling (dvs Taylorutveckling) ger

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x),$$

där resstermen på Lagrangeform kan skrivas

$$R_3(x) = \frac{1}{5!} x^5 \cos(\theta x),$$

för något θ med $0 < \theta < 1$ (obs! θ får bero av x). Vi bildar nu $f(x)$:

$$f(x) = g(x^{60}) = x^{60} - \frac{x^{180}}{3!} + R_5(x^{60}).$$

Vi inser av uttrycket för resttermen att denna är så liten att polynomdelen $= x^{60} - x^{180}/3!$ måste sammanfalla med vad vi skulla få vid en direkt tillämpning av Taylors formel på f.