Tentamensskrivning, 2012-12-10, kl. 08.00–13.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För att tillgodoräkna sig resultat från denna del krävs krävs minst 5 av 6 moduler godkända från Del 1. För betyg A krävs 28 poäng, för betyg B krävs 20 poäng, och för betyg C krävs 12 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

11. Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \ln \frac{e^{2x}}{3|x|}.$$

Rita grafen till funktionen, med indikation om var funktionen växer och var den avtar, eventuella asymptoter, och konvexitet-konkavitet samt eventuella inflexionspunkter. (5)

Funktionen kan skrivas om på formen

$$f(x) = 2x - \ln(3|x|),$$

och eftersom $\ln|x| \to -\infty$ då $x \to 0$ är har $x = 0$ en vertikal asymptot. Man skulle kunna tro att $y = 2x + C$ borde vara en sned asymptot, för någon konstant C. Detta visar sig inte vara fallet! Det finns alltså bara en asymptot, nämligen $x = 0$.

Vi deriverar:

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Detta ger att $f'(x) > 0$ om $x > \frac{1}{2}$ eller om $x < 0$, och $f'(x) < 0$ om $0 < x < \frac{1}{2}$. Funktionen är alltså strängt växande på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]\frac{1}{2}, +\infty[$, och strängt avtagande på intervallet $]0, \frac{1}{2}[$. Vi deriverar nu en gång till:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \qquad x \neq 0.$$

Detta ger att f är strängt konvex på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, +\infty[$. Inflexionspunkter saknas. P g a tekniska problem avstår vi från att här rita upp grafen.

---

12. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{|x|^{\beta}(1 + x^2)}\, dx,$$

där β är en reell parameter. Avgör för vilka β som integralen konvergerar. (5)

V.g. vänd!

Av symmetriskäl gäller att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{|x|^\beta(1+x^2)}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{|x|^\beta(1+x^2)}\,dx.$$

Ett studium av beteendet kring $x = 0$ där $\sin x \approx x$ ger vid handen att den generaliserade Riemannintegralen

$$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{|x|^\beta(1+x^2)}\,dx$$

konvergerar precis då $\beta < 2$. Konvergens av resterande bit

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{|x|^\beta(1+x^2)}\,dx$$

inträffar precis då $\beta > -1$. Här är situationen lite intrikat och kräver ett noggrant arbete. Svaret blir att vår integral konvergerar om och endast om $-1 < \beta < 2$.

---

13. En dag började snön falla och det fortsatte att snöa med jämn hastighet under några timmar. En snöplog med den lustiga egenskapen att dess hastighet är proportionell mot snötäckets tjocklek startade kl 10.00. Det visade sig att den tillryggalade en dubbelt så lång vägsträcka under den andra timman som under den första. När började det snöa? (5)

Låt oss sätta tiden så att klockan 10.00 motsvarar $t = 0$. Låt nu $s(t)$ beteckna den tillryggalagda vägsträckan vid tiden t; då är förstås $s(0) = 0$. Nu gäller att

$$s'(t) = C(t+T), \qquad 0 \le t < +\infty,$$

där T betecknar antalet timmar sedan det började snöa, enligt modellen för snöfallet och plogens egenskaper. Det följer dessutom ur uppgiften att

$$s(2) - s(1) = 2\,s(1).$$

Eftersom

$$s(t) = \frac{C}{2}(t+T)^2 - \frac{C}{2}T^2$$

blir således

$$\frac{C}{2}(2+T)^2 - \frac{C}{2}(1+T)^2 = 2\left(\frac{C}{2}(1+T)^2 - \frac{C}{2}T^2\right).$$

Om vi delar med $C/2$ överallt blir

$$(2+T)^2 - (1+T)^2 = 2\,((1+T)^2 - T^2),$$

vilket leder till

$$3 + 2T = 2 + 4T,$$

med lösningen $T = 1/2$. Det hade alltså gått en halvtimme när snöplogen började kl 10.00: snöfallet började kl 09.30.

---

14. Teknologen Tobserverade vid sitt julbad att det tog 4 minuter att tömma badkaret med ursprungligt vattendjup 7 dm. Då drog sig T till minnes Torricellis lag, som i detta fall ger att vattendjupet minskar med en hastighet som i varje ögonblick är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet. Vilket värde skulle proportionalitetskonstanten få i detta fall? (5)

Om vi låter $h(t)$ beteckna vattenhöjden vid tiden t, så vet vi att $h(0) = 7$ medan $h(4) = 0$. Torricellis lag ger differentialekvationen

$$h'(t) = -k\sqrt{h(t)},$$

där vi söker proportionalitetskonstanten k. Lösningen till differentialekvationen blir (variabelseparationsmetoden)

$$h(t) = \frac{1}{4}(C - kt)^2,$$

där C är en lämplig konstant. Ur $h(0) = 7$ ser vi att $C = 2\sqrt{7}$. Ur $h(4) = 0$ inser vi att

$$0 = C - 4k = 2\sqrt{7} - 4k$$

och därför blir $k = \sqrt{7}/2$. Enheten är $(\text{dm})^{1/2}/\text{min}$.

---

15. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$y'' + 9y = x^2e^x.$$

Bestäm därefter den lösning som har begynnelsedata $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(5)

Vi löser först den homogena ekvationen $y'' + 9y = 0$. Vi får karakteristiska ekvationen $r^2 + 9 = 0$ med de rent imaginära rötterna $r = \pm 3i$. Detta ger den allmänna homogena lösningen $y_h = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$. Vi söker därefter en partikulärlösning y_p på formen $y_p = (ax^2 + bx + c)e^x$. Instoppning ger

$$y_p'' + 9y_p = [ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c + 9ax^2 + 9bx + 9c]e^x = x^2e^x,$$

och vi ser att $a = 1/10$, $b = -1/25$, $c = -3/250$. Detta ger den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = \left(\frac{x^2}{10} - \frac{x}{25} - \frac{3}{250}\right)e^x + C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x).$$

---

16. Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $x^4y^3 = 27$ i punkten $(1, 3)$. (5)

Implicit derivering av ekvationen $x^4y^3 = 27$ ger att $4x^3y^3dx + 3x^4y^2dy = 0$. Stoppar vi in punkten $(1, 3)$ blir sambandet $108dx + 27dy = 0$, vilket vi förenklar till $4dx + dy = 0$. Ekvationen för tangenten blir härur

$$4(x - 1) + (y - 3) = 0.$$

Ekvationen för normalen blir istället

$$(x - 1) - 4(y - 3) = 0.$$

---

17. Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad n. Visa att om a är ett reellt tal så kan $p(x)$ skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Om vi istället skulle tillåta $p(x)$ att ha grad $n+1$, gäller inte ovanstående. Kan du förklara varför? (5)

Enligt Taylors formel gäller att

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

där resttermen på Lagrangeform kan skrivas som

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}p^{(n+1)}(\xi),$$

och ξ är någon punkt mellan a och x. Nu eftersom p är ett polynom av grad n så är derivatan av ordning $n+1$ lika med noll. Därför blir resttermen lika med noll, och påståendet följer.

Om nu istället p vore ett polynom av grad $n+1$ kan inte likhet gälla, eftersom vänster led är ett polynom av grad $n+1$ och höger led har grad n.