Tentamensskrivning, 2013-05-30, kl. 14.00–19.00.

SF1602 Diffint (envariabel), för F.

Hjälpmedel: penna, papper, suddgummi.

För betyg E krävs minst 16 p, för betyg D krävs 18 p, för betyg C krävs 22 p, för betyg B krävs 28 p, och för betyg A krävs 32 p. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Fibonacci-talen är talföljden $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Härvid bildas varje nytt tal som summan av de två föregående talen.

(a) Beskriv med matematiska symboler den iterativa process som definierar Fibonacci-följden.

(b) Antag att följden av kvoter $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ konvergerar mot ett tal τ. Bestäm i så fall värdet på τ. Detta tal kallas *det gyllene snittet.* (5p)

(a) Vi har att $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, med initialdata $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

(b) Vi skriver om iterationsrelationen som

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Härvid gäller att $x_{n+1}/x_n \to \tau$, medan $x_{n-1}/x_n \to 1/\tau$, då $n \to +\infty$. Vi får alltså ekvationen

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau},$$

vilken vi skriver om som

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningen

$$\tau = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Den negativa roten kommer inte i fråga, så i själva verket är

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

---

2. Bestäm en primitiv funktion till funktionen

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}.$$

(5p)

V.g. vänd!

Vi kvadratkompletterar och får

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Efter substitutionen $t = x + \frac{1}{2}$ har vi alltså

$$\int \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}\, dt.$$

Enligt [BETA, s. 158] har vi

$$\int \sqrt{\frac{3}{4} + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\, t\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{8}\ln\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}\right) + C.$$

Efter återsubstitution blir det

$$\int \sqrt{1 + x + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1 + x + x^2} + \frac{3}{8}\ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + x + x^2}\right) + C.$$

---

3. Avgör hur många reella lösningar ekvationen

$$x\, e^{-x} = C$$

har, beroende på värdet på konstanten C. (5p)

Vi betraktar funktionen

$$f(x) = x\, e^{-x}.$$

Dess derivata är

$$f'(x) = (1 - x)\, e^{-x}.$$

Vi får att $f'(x) > 0$ på intervallet $]-\infty, 1[$, och att $f'(x) < 0$ på intervallet $]1, +\infty[$. Detta innebär att $f(x)$ är strängt växande på $]-\infty, 1]$, och strängt avtagande på $[1, +\infty[$. Vi observerar att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$, medan $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$. Vi får ett globalt maximum i $x = 1$, och värdet är då $f(1) = e^{-1}$. Om $C > e^{-1}$ får vi alltså inga lösningar alls. Om $C = e^{-1}$ har vi exakt en lösning $x = 1$, och om $0 < C < e^{-1}$ får vi två lösningar. För $C \leq 0$ har vi exakt en lösning.

---

4. Betrakta den kurva som fås av parametriseringen

$$(\cos(t), \cos(2t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

rita kurvan. Bestäm därefter vilka punkter på kurvan som ligger närmast respektive längst ifrån origo $(0, 0)$. (5p)

5. Bestäm den punkt x i intervallet $[0, 2]$ för vilken funktionen

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

antar sitt största värde. (5p)

Funktionen $\cos(t^2)$ är positiv om $0 \leq t < \sqrt{\pi/2}$. På intervallet $\sqrt{\pi/2} < t \leq 2$ är $\cos(t^2)$ istället negativ. Eftersom $F'(x) = \cos(x^2)$ är detta avgörande: max för $F(x)$ antas då $x = \sqrt{\pi/2}$.

---

6. En dag började snön falla och det fortsatte att snöa med jämn hastighet under några timmar. En snöplog med den speciella egenskapen att dess hastighet är omvänt proportionell mot snötäckets tjocklek startade kl 11.00. Det visade sig att den tillryggalade en dubbelt så lång vägsträcka under den första timman som under den andra. När började det snöa? (5p)

Låt oss sätta tiden så att klockan 11.00 motsvarar $t = 0$. Låt nu $s(t)$ beteckna den tillryggalagda vägsträckan vid tiden t; då är förstås $s(0) = 0$. Nu gäller att

$$s'(t) = \frac{C}{t+T}, \qquad 0 \leq t < +\infty,$$

där T betecknar antalet timmar sedan det började snöa, enligt modellen för snöfallet och plogens egenskaper. Det följer dessutom ur uppgiften att

$$2\,s(2) = 3\,s(1).$$

Eftersom

$$s(t) = C\ln(t+T) - C\ln T$$

blir således

$$2\,(C\ln(2+T) - C\ln T) = 3\,(C\ln(1+T) - C\ln T).$$

Om vi delar med C överallt blir

$$2\,(\ln(2+T) - \ln T) = 3\,(\ln(1+T) - \ln T),$$

vilket leder till

$$2\ln(2+T) - 3\ln(1+T) + \ln T = 0,$$

dvs

$$T(2+T)^2 = (1+T)^3.$$

Detta är en ekvation av tredje graden där högstagradstermerna tar ut varandra:

$$T(T^2 + 4T + 4) = T^3 + 3T^2 + 3T + 1,$$

så att

$$T^2 + T - 1 = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna

$$T = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

varav den negativa lösningen är orimlig. Kl 11.00 hade det alltså gått

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

timmar sedan snöfallet började.

---

7. Ange summan av serien

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{2k} 2^{-k} (-\pi)^k}{(2k)!}.$$

Motivera ditt svar utförligt! (5p)

Eftersom

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

för alla reella x enligt Taylors formel, så får vi med insättning av $x = 3\sqrt{\pi/2}$ att

$$\cos \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k} 2^{-k} \pi^k}{(2k)!} = 1 - \frac{9\pi}{4} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{2k} 2^{-k} (-\pi)^k}{(2k)!}.$$

Så svaret blir

$$-1 + \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

---

8. Låt funktionen $f(x)$ ges av att $f(x) = |x|^5$ för $-1 \leq x \leq 1$, samt $f(x) = 1$ för $|x| > 1$. Finn explicit (!!) en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ med $F(0) = 2$. (5p)

Vi ser att $F(x) = x + C_1$ om $x \geq 1$, $F(x) = x + C_2$ om $x \leq -1$, $F(x) = \frac{x^6}{6} + C_3$ om $0 \leq x \leq 1$, och $F(x) = -\frac{x^6}{6} + C_4$ om $-1 \leq x \leq 0$. Vi vill att funktionen ska vara kontinuerlig i skarvpunkterna -1, 0, och 1, och att $F(0) = 2$. Då ser vi att $C_3 = C_4 = 2$, $C_1 = 7/6$, och $C_2 = 17/6$.