F11: Konvexa funktioner

6 oktober 2009

Konvexitet

KONVEX MÄNGD I PLANET: En mängd S i planet sägs vara **konvex** om till varje par av punkter s_1 och s_2 ur S så kommer hela linjestycket mellan s_1 och s_2 att vara innehållet i S.

EXEMPEL: Mängden av (x, y) med $x^2 + y^2 < 1$ är konvex. Rektangeln av (x, y) med $0 < x < 1$ och $0 < y < 1$ är också konvex.

Konvexa och konkava funktioner

KONVEX FUNKTION: Funktionen $f(x)$ definierad på ett intervall I är **konvex** om mängden av (x, y) med $y > f(x)$ är konvex. Om grafen $y = f(x)$ inte innehåller några linjestycken är funktionen **strängt konvex**.

KONKAV FUNKTION: Funktionen $f(x)$ definierad på ett intervall I är **konkav** om mängden av (x, y) med $y < f(x)$ är konvex. Om grafen $y = f(x)$ inte innehåller några linjestycken är funktionen **strängt konkav**.

OBS: $f(x)$ är konkav om och endast om $-f(x)$ är konvex. Samma avseende sträng konvexitet-konkavitet. Det räcker alltså att studera konvexa funktioner.

En ekvivalent beskrivning

SATS 1: Funktionen f är konvex på intervallet I om och endast om

$$f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leq \theta_1 f(x_1) + \theta_2 f(x_2)$$

gäller för alla x_1, x_2 på I, och alla θ_1, θ_2 ur intervallet $[0, 1]$ med $\theta_1 + \theta_2 = 1$.

SATS 2: Funktionen f är strängt konvex på intervallet I om och endast om

$$f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) < \theta_1 f(x_1) + \theta_2 f(x_2)$$

gäller för alla x_1, x_2 på I, och alla θ_1, θ_2 ur intervallet $]0, 1[$ med $\theta_1 + \theta_2 = 1$.

Ett kriterium

SATS 3: En deriverbar funktion är konvex om och endast om dess derivata är växande. Den deriverbara funktionen är strängt konvex om och endast om dess derivata är strängt växande.

SATS 4: En två gånger deriverbar funktion är konvex om $f''(x) \geq 0$, och strängt konvex om $f''(x) > 0$.

EXEMPEL. $f(x) = a^x$, $f(x) = \ln x$.

EXEMPEL. Tillämpning på aritmetiskt och geometriskt medelvärde.

Ytterligare en beskrivning

SATS 5: En sluten konvex mängd i planet är ett snitt av halvrum.

SATS 6: En deriverbar funktion på ett intervall är konvex om och endast om den ligger ovanfär sina tangenter.

Inflexionspunkt

DEFINITION: En punkt x_0 där $f(x)$ är konvex på ena sidan och konkav på andra, kallas för en inflexionspunkt.