F13: Primitiva funktioner. Partialbråksuppdelning, rotuttryck.

13 oktober 2009

Exempel på partialbråksuppdelningar

EXEMPEL: Partialbråksuppdela

$$\frac{2x^2+x-3}{(x+1)^2(x+2)}.$$

EXEMPEL: Partialbråksuppdela

$$\frac{x+2}{(x^2+1)(x+1)^2}.$$

EXEMPEL: Partialbråksuppdela

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x+2)^2}.$$

Skriv åtminstone upp lämplig ansats.

Primitiva funktioner

Vi måste kunna hitta primitiva funktioner till följande typ-funktioner:

1. $\frac{A}{x-\alpha}$.
2. $\frac{A}{(x-\alpha)^n}$, för $n \geq 2$.
3. $\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$.
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$, för $n \geq 2$.

I fallen 3 och 4 kan vi anta att $x^2 + ax + b$ saknar reella rötter. Man visar nämligen att alla rationella funktioner är summor av polynom och funktioner av dessa fyra typer.

Primitiva funktioner (2)

I fallen 1 och 2 är det lätt att hitta primitiva funktioner. I fallet 3 gör vi en lämplig substitution som återför oss till fallet $\frac{Ax+B}{x^2+1}$, vars primitiva funktion kan uttryckas i termer av $\ln(x^2+1)$ och $\arctan x$. Det sista fallet 4 återförs via substitution till typfallet $\frac{Ax+B}{(x^2+1)^n}$, där Ax är ofarligt (lätt att hitta primitiv funktion), och det återsår att behandla $\frac{1}{(x^2+1)^n}$. Denna löses ut via partialintegration, som ger rekursionsformeln ($I_n(x) = \int (x^2+1)^{-n} dx$)

$$I_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}(x).$$

Primitiva funktioner: exempel

EXEMPEL: Integrera

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx.$$

EXEMPEL: Integrera

$$\int \frac{x^5+3x^3-7x^2+6x+1}{x^4+2x^2-8x+5}\,dx.$$

Rotuttryck och substitutioner

Ibland är substitutionen

$$t = \sqrt{x + \alpha}$$

lämplig. Speciellt då vi har ett rationellt uttryck i x och $\sqrt{x + \alpha}$.
Alternativt kan substitutionen

$$t = \sqrt{\frac{x + \alpha}{x + \beta}}$$

fungera.
I vissa fall är det även lämpligt att skriva

$$t = x + \sqrt{x^2 + \alpha}.$$

Trigonometriska funktioner

Vid rationella uttryck i $\sin x$, $\cos x$ kan substitutionen

$$t = \tan(x/2)$$

vara förträfflig.

EXEMPEL. Beräkna

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx.$$