F26: Taylors formel

25 november 2009

Polynomapproximation

Vi har en "snäll" funktion $f(x)$ som vi vill approximera för x nära $x = 0$. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig kan vi skriva

$$f(x) \approx f(0) \qquad \text{om} \quad x \approx 0.$$

Då har vi alltså approximerat $f(x)$ med den konstanta funktionen $f(0)$. Men vi kan bättre:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x \qquad \text{om} \quad x \approx 0.$$

Då har båda sidor samma derivata i $x = 0$, och vi känner intuitivt att approximationen är bättre. Höger led, $f(0) + f'(0)\,x$, är nu den räta linje som bäst approximerar $f(x)$ nära $x = 0$. Vi kan skriva

$$p_0(x) = f(0), \qquad p_1(x) = f(0) + f'(0)x,$$

och införa andragradspolynomet

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2.$$

Polynomapproximation

Polynomet $p_2(x)$ approximerar rimligtvis funktionen $f(x)$ ännu bättre, eftersom värdet, derivatan, och andraderivatan sammanfaller med motsvarande för $f(x)$ i $x = 0$. Mer generellt bildar vi nu

$$(1)\quad p_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n,$$

och hoppas att vi får en god approximation av $f(x)$. Polynomet $p_n(x)$ kallas **Taylorpolynomet** av grad n i punkten $x = 0$. Det har alla derivator av ordning upp till n lika med motsvarande för $f(x)$.

Partiell integration

Enligt insättningsformeln för integraler (som följer från integralkalkylens huvudsats) har vi

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Vi tänker på integralen som

$$\int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt$$

och partialintegrerar (vi använder $t - x$ som primitiv funktion till 1 m a p t):

$$\begin{aligned}\int_0^x f'(t)\,dt = \Big[(t-x)f'(t)\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt \\ = f'(0)\,x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt.\end{aligned}$$

Maclaurins formel

Detta betyder att vi har

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x - \int_0^x (t-x) f''(t)\,dt.$$

Om vi gör en liknande partiell integration till, får vi

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)\,dt.$$

Observera att först har vi Taylorpolynomet av ordning 2, sedan ett integraluttryck (restterm). Mer generellt får vi av ett antal partialintegrationer att

$$f(x) = p_n(x) + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{2}$$

där $p_n(x)$ är Taylorpolynomet av ordning n. Relationen (2) kallas **Maclaurins formel**.

Maclaurins formel med enklare restterm

Problemet med formuleringen (2) är att vi egentligen inte vet hur stor resttermen

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

är. Här har vi glädje av integralkalkylens medelvärdessats i generaliserad form. Vad som är väsentligt för att kunna använda den är att funktionen $g(t) = (t-x)^n$ har konstant tecken på intervallet mellan 0 och x. Vi får att det finns ett tal θ, med $0 < \theta < 1$, så att

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt &= f^{(n+1)}(\theta x) \int_0^x (t-x)^n\,dt \\ &= f^{(n+1)}(\theta x) \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=x} = f^{(n+1)}(\theta x)\,\frac{(-1)^n x^n}{n+1}.\end{aligned}$$

Resttermen

Vi finner att

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\theta x)\, x^{n+1},$$

där θ betecknar ett tal mellan 0 och 1. Denna mindre precisa form av resttermen kallas **Lagranges restterm**. Vi har alltså Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\, x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_{n+1}(x).$$

Taylors formel

Antag att vi vill approximera $f(x)$ runt $x = a$ istället. Vad göra? Vi kan betrakta funktionen

$$g(y) = f(y + a)$$

och utveckla den runt $y = 0$. När vi sedan byter tillbaka till x får vi

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-a)^{n+1},$$

där ξ är någon punkt mellan a och x. Denna formel kallas **Taylors formel**.

Några standardutvecklingar

Nedan är som tidigare θ ett tal mellan 0 och 1.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

med

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + R_{n+1}(x),$$

med

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \cos(\theta x).$$

Några standardutvecklingar

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

med

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\, x^{n+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n+1}(x),$$

med

$$R_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

Några standardutvecklingar

Här använder vi generaliserade binomialkoefficienter (med reellt α!):

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$