F6: Gränsvärden, asymptoter, serier

17 september 2008

Standardgränsvärden

POTENS och EXPONENT: Vi har att

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

om $a > 1$. Detta innebär att expoentialfunktionen växer snabbare än potensfunktionen. Man visar på samma vis att

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

om $\alpha > 0$. En variant av det senare är att

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

TRIGONOMETRI: Vi har att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Standardgränsvärden II

EXPONENTIALFUNKTIONEN: Det gäller att

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \longrightarrow 1 \quad \text{då} \quad x \longrightarrow 0,$$

samt att

$$\frac{e^x - 1}{x} \longrightarrow 1 \quad \text{då} \quad x \longrightarrow 0.$$

Asymptoter

DEFINITION: En asymptot är en rät linje som grafen till en funktion närmar sig när går ut mot oändligheten i en viss riktning. En asymptot $x = a$ kallas vertikal, medan en asymtot $y = kx + m$ sägs vara sned.

PROBLEM 1: Bestäm alla eventuella asymptoter till

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{3}{x-4}.$$

Serier

Givet en talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots$, bildar vi summorna

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots.$$

och vi beskriver detta med summasymbolen:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

DEFINITION: Om delsummorna s_n konvergerar mot ett tal, säg S, då $n \to +\infty$, så sägs serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

vara **konvergent** med summa S. Om delsummorna saknar gränsvärde kallas serien **divergent**.

Exempelproblem

PROBLEM 2: Beräkna summan

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

när denna konvergerar. Avgör också när serien konvergerar.

PROBLEM 3: Avgör om den harmoniska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

är konvergent eller divergent.