F9: Högre derivator. Kurvritning.

30 september 2008

Högre derivator

DEFINITION: Om n är ett positivt heltal definierar vi n-te derivatan av funktionen f som att vi deriverar funktionen n gånger. Vi skriver

$$D^n f = f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

för n-te derivatan.

ELEMENTÄRA FUNKTIONER: Vi ser att $D^n e^x = e^x$, för alla positiva heltal n. Dessutom gäller att

$$D^n x^\alpha = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) x^{\alpha - n}.$$

Speciellt får vi

$$D^n \ln x = D^{n-1}(x^{-1}) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Vi har också att

$$D^n \sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

LEIBNIZ' FORMEL

SATS 1: Vi har att

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k} f)(D^k g).$$

EXEMPEL: Beräkna $D^n(x^2 e^x)$.

Derivata av komplexvärd funktion

DEFINITION: Om

$$f(x) = g(x) + ih(x),$$

där g och h är reellvärda, så är derivatan

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

EXEMPEL: Derivera $f(x) = e^{wx}$, där w är en komplex konstant.

Extremvärden

METOD TECKENSTUDIUM: Ett teckenstudium av derivatan ger oss möjlighet att avgöra var funktionen växer och avtar. T ex $f'(x) > 0$ på ett intervall betyder att funktionen $f(x)$ växer på intervallet. Detta visas med hjälp av Medelvärdessatsen! En **terrasspunkt** är en punkt där derivatan är noll, men derivatan har samma tecken på båda sidor om punkten.

EXEMPEL: Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x) = x^{1/x}$, för $x > 0$.

Andraderivatan

SATS 2: Antag att $f'(x_0) = 0$ och att f'' existerar och är kontinuerlig i en omgivning av x_0. Då gäller:
(a) Om $f''(x_0) > 0$ har funktionen ett strängt lokalt minimum i x_0,
(b) Om $f''(x_0) < 0$ har funktionen ett strängt lokalt maximum i x_0.