

Institutionen för matematik, KTH  
Avd. matematik  
TK januari 2013

## **Diff-int II, del 2, flervariabel för F1, VT 2013**

**Föreläsningar:** Torbjörn Kolsrud, 7906238, kolsrud@math.kth.se,  
**Kurshemsida:** <http://www.math.kth.se/~kolsrud/FlervariabelVT13>

### **Övningar:**

Oliver Lindblad Petersen, oliver.lindblad.petersen@gmail.com  
Petter Nilsson, pettni@kth.se  
Per Moosavi, pmoosavi@kth.se

### **Kursinnehåll:**

Funktioner av flera variabler. Topologiska grundbegrepp i  $\mathbb{R}^n$ .  
Differentierbarhet och linjär approximation av avbildningar.  
Partiella derivator, differentialer, gradient.  
Kedjeregeln i allmän form. Implicita funktionssatsen.  
Extremproblem med och utan bivillkor.  
Multipelintegraler, koordinatbyten, geometriska tillämpningar.  
Elementär vektoranalys: Kurv- och ytintegraler.  
Gauss', Greens och Stokes' formler.

**Kursbok:** Böiers, L.-C. och Persson, A., *Analys i flera variabler*, tredje uppl. 2004, Studentlitteratur. Tillhörande övningsbok.

**Kursens omfattning:** Kap. 1-4, 5.1, 5.4, 5.7, 6-7, 8.1-8.2, 9, 10.1-10.5.

### **Rekommenderade uppgifter:**

- 1:** 2, 3, 6-9, 11, 13, 16, 18, 20-21, 24, 27, 29, 32, 34.  
**2:** 1, 2, 4, 6, 8, 10-12, 14, 16, 20, 21, 24, 25, 28, 30, 32, 34, 39, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 55, 58, 60, 62, 63, 66, 68, 70, 72, 74, 75, 80, 84, 87, 90, 96, 97, 99, 100.  
**3:** 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 23, 26, 29, 31, 33, 35, 37, 41.  
**4:** 1, 3, 5, 10, 13-16, 18, 20, 22, 23, 25-26, 31-33, 36, 38, 42, 46, 48.  
**5:** 1, 9, 15.  
**6:** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 28, 31, 33, 36, 41, 45, 49, 51, 54, 56.  
**7:** 1, 4, 7, 10, 12, 15.  
**8:** 1, 3, 6, 10, 14, 16, 35, 38, 44.  
**9:** 1, 4, 6, 7, 10, 13, 18, 21, 23, 25, 29, 31, 32, 36, 42, 49, 51.  
**10:** 1, 4, 7, 8, 11, 12, 16, 17, 22, 26, 28, 30, 34, 35, 38, 41, 51, 52, 54, 61-63, 68, 70.

**Kursmål:** Studenten förväntas efter genomgången godkänd kurs:

- Kunna redogöra för funktionsbegreppet i flera variabler, inklusive definitions- och värdemängd, sammansatta och inversa funktioner, nivåkurvor och -ytor, samt i enklare fall begreppen öppen mängd, slutna mängd, begränsad mängd och rand till en mängd.
- Kunna derivera partiellt och veta att då derivatorna är kontinuerliga spelar derivationsordningen ingen roll. Kunna använda kedjeregeln och omforma enklare differentialuttryck i nya koordinater.
- Kunna använda andraderivatorna för att karakterisera kritiska punkter i främst två dimensioner.
- Kunna bestämma största och minsta värden för kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade områden. Kunna i enklare fall använda Lagranges metod för att optimera funktioner under bivillkor.
- Kunna bestämma ekvationer för tangentplan. Kunna bestämma gradienten till en funktion och veta dess tolkning som normal till tangentlinjer resp. tangentplan. Kunna beräkna riktningsderivator.
- Kunna använda linjär approximation och Taylors formel, främst till ordning två och i två dimensioner.
- Kunna bestämma krökningen för kurvor i två och tre dimensioner.
- Kunna redogöra för hur dubbelintegraler införs som gränsvärde av Riemannsummor. Kunna beräkna dubbelintegraler, samt i enklare fall trippelintegraler, genom upprepad integrering. Detta inkluderar att bestämma integrationsgränser i de successiva integrationerna.
- Kunna använda multipelintegraler i tillämpningar, t ex för att bestämma volymer och areor.
- Kunna beräkna kurvintegraler i två och tre dimensioner. Kunna beräkna ytintegraler i tre dimensioner. Kunna i enklare fall använda Greens formel och divergenssatsen.
- Kunna byta väg i kurvintegraler och i enklare fall avgöra om en potentialfunktion existerar samt i förekommande fall bestämma denna.

För högre betyg ska studenten också:

- Allmänt sett kunna lösa svårare, mer sammansatta problem och visa större insikt i teorin och begreppen, främst teorin om kontinuerliga funktioner.
- Kunna definiera gränsvärde och kontinuitet och bevisa att givna funktioner är kontinuerliga. Veta skillnaden mellan gränsvärden och kontinuitet i en och i högre dimensioner.
- Kunna definiera differentierbarhet samt ge kriterium för detta .
- Kunna Taylors formel av högre ordning och för tre (eller flera) variabler, inklusive andraderivateundersökning vid kritiska punkter.
- Kunna bestämma derivator genom implicit derivering av ekvationssystem.
- Kunna redogöra för kurvors och ytors orientering, linjeintegralers oberoende av vägen, existens av potentialfunktion, samt fenomen som uppstår vid singulära fält och potentialer.
- Kunna formulera och använda Stokes sats.

**Föreläsningsplan:**

**F1, fre 11/1 i K1:** Introduktion och översikt. Kap. 1.1-1.3.  $\mathbb{R}^n$ . Avstånd, öppna, slutna och kompakta mängder; rand till en mängd.

**F2, on 16/1 i K1:** 1.4. Funktioner i flera variabler; graf, nivåkurvor och -ytor. Andragradskurvor och -ytor. 1.5 gränsvärden: mer komplicerad bild i högre dimension.

**F3, ti 22/1 i K1:** Kap. 1.6. Kontinuitet i flera variabler. Satser om kontinuerliga funktioner. 1.4. Vektorvärda funktioner.

**F4, on 23/1 i K1:** Kap. 2.1. Partiella derivator, tolkning, tangentplan.

**F5, ti 29/1 i K1:** Kap. 2.2. Differentierbarhet. Kriterier för detta. Linjär approximation.

**F6, on 30/1 i K1:** Kap. 2.3. Kedjeregeln. Transformering av förstagsuttryck.

**F7, ti 5/2 i K1:** Kap 2.4. Gradient och riktningsderivata. Tolkingar av gradienten.

**F8, on 6/2 i K1:** Kap 2.5. Högre ordningens partiella derivator. Transf. av andragradsuttryck. Kap. 5.4 Några viktiga partiella differentialekvationer.

**OBS! övn. 4 to 7/2:** KS 1. Omfattar t o m kap. 2.3.

**F9, ti 12/2 i K1:** Kap. 2.6. Taylors formel (främst i två dimensioner och av ordning två).

**F10, on 13/2 i K1:** Kap. 2.6, forts. Extrempunkter och deras karakterisering. Andraderivatetestet.

**F11, ti 19/2 i K1:** Kap. 3.1-3.2. Parametriserade kurvor och ytor; funktionalmatriser och -determinanter.

**F12, on 20/2 i K1:** Kap. 3.2, forts. Kap 3.3. Inversa och implicita funktioner.

**F13, ti 26/2 i K1:** Kap. 3.3, implicita funktioner, forts. Början av Kap. 4. Optimering.

**F14, on 27/2 i K1:** Kap. 4.1-4.2. Optimering på kompakta och icke-kompakta mängder.

**F15, ti 5/3 i K1:** Kap. 4.3. Optimering med bivillkor, Lagranges metod.

**F16, fre 8/3 i K1:** Reserv/repetition. Kap. 5.1. Derivering under integraltecknet.

**OBS! övn. 8, må 18/3:** KS 2. Omfattar t o m kap. 3.

**F17, on 20/3 i K1:** Kap. 6.1-6.3. Dubbelintegraler som limes av Riemannsummor, upprepad integration.

**F18, fre 22/3 i K1:** Kap. 6, forts. 6.4 variabelbyte i dubbelintegraler.

**F19, on 27/3 i K1:** Kap. 6.4, forts. 6.5 generaliserade dubbelintegraler.

**F20, to 28/3 i K1:** Kap. 7. Trippel- och multipelintegraler.

**F21, on 10/4 i K1:** Kap. 8.1-2. Integralens tillämpningar.

**F22, fre 12/4 i K1:** Reserv/repetition.

**OBS! övn. 11, to 7/4:** KS 3. Omfattar t o m kap. 7.

**F23, ti 16/4 i K1:** Kap. 5.6. Kurvors krökning. (Övningsuppg. utdelas.)

**F24, on 17/4 i K1:** 9.1 och 10.1. Kurvintegraler i  $\mathbb{R}^2$  och  $\mathbb{R}^3$

**F25, ti 23/4 i K1:** 9.4 och 10.5. Konservativa fält och potentialer.

**F26, on 24/4 i K1:** 10.1. Flödesintegraler.

**F27, må 6/5 i K1:** 9.2-9.3. Greens formel och dess tillämpningar.

**F28, ti 7/5 i K1:** 9.3 och 10.2. Divergenssatsen i 2 och 3 dimensioner. 10.4. Nablaräkning.

**F29, ti 14/5 i K1:** 10.3. Stokes' sats.

**F30, on 15/5 i K1:** Reserv/repetition.

**OBS! övn. 15 fre 16/5:** KS 4. Omfattar t o m kap. 10.

**Tentamen fredag 27/5, 9-14, sal E31-E36**

**Examination:** Kursen avslutas med en skriftlig tentamen (inga hjälpmedel tillåtna!). Under kursens gång ges också fyra stycken **lappskrivningar** på den andra övningstimmen. (Tag med giltig legitimation!) Varje lappskrivning består av 3 uppgifter à 3 poäng. Endast resultaten godkänd och icke godkänd förekommer. En lappskrivning är godkänd om man uppnått  $\geq 5$  poäng på den.

Godkänd lappskrivning ger bonus, 3 poäng på tentamen. Denna bonus kan endast användas på ordinarie tentamen samt omtentamen samma läsår. (Bara två tentor!)

Tentamensskrivningen består av två delar: del I omfattar 40 poäng och del II 42 poäng. För godkänt (= betyg E) krävs 32 poäng (på del I-II), inklusive bonus. Betyg D erhålles vid uppnådda 37 poäng (på del I-II), inklusive bonus.

För betyg C, B, A måste man vara godkänd och ha uppnått ett visst antal poäng på del II.

Om man på tentamen har uppnått 30 poäng (inklusive bonus), med sex eller fler uppgifter som är *väsentligen rätt*, ges betyg Fx, med möjlighet till muntlig komplettering av tentamen. Denna skall äga rum senast en månad efter tentamen. Endast betyg E kan erhållas.

**För äldre teknologer** ges betygen 5, 4, 3, K och U, där 3 motsvarar E, K motsvarar Fx och U (underkänd) motsvarar F.

**Obligatorisk tentamensanmälan** via mina sidor. Tidpunkt meddelas senare.

**Kurssekreterare:** Rose-Marie Jansson, jansson@math.kth.se, ansvarar för registrering och betygsrapportering. Vid eventuella problem med kursregistrering och/eller tentamensanmälan, vänd dig till Rose-Marie – inte till Torbjörn.