Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 4 juni 2013 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

I allmänhet gäller vid kursen SF1604 för F och D att bonuspoäng får användas vid det första ordinarie tentamenstillfället och vid första ordinarie omtentamen, dvs för F vid decembertentan och junitentan samt för D vid marstentan och junitentan.

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Givet är systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

   (a) (1p) Bestäm de värden på a och b för vilka systemet ovan har en och endast en lösning.

   (b) (2p) För vilka värden på a och b saknar systemet lösning.

   (c) (2p) Ange samtliga lösningar till systemet i de fall systemet har mer än en lösning.

2. Givet är matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) (3p) Bestäm $\mathbf{A}$:s samtliga egenvärden och tillhörande egenvektorer.

   (b) (2p) Diagonalisera matrisen $\mathbf{A}$.

V.G.V.

3. (ON-system) Planet π innehåller en punkt med koordinaterna är $(1, 2, -1)$ samt en linje med parameterformen $(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(2, 1, 0)$. Linjen ℓ innehåller punkterna $(0, 1, 2)$ och $(2, 3, 0)$. Ange på ett "lämpligt sätt" ℓ:s vinkel med planet π och bestäm ℓ:s skärningspunkt med planet π. (Man kan få max 3p för en korrekt lösning till endast ett av dessa problem)

DEL II

4. (5p) En talföljd a_0, a_1, a_2, ... definieras genom att $a_0 = 2$ och $a_1 = 4$ samt att

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2},$$

för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Visa med ett induktionsbevis att $a_n = (-1)^n + 5^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. (5p) Låt $C(0, b)$ beteckna rummet av alla funktioner i en variabel t som är kontinuerliga på intervallet $(0, b)$. Bestäm ett tal b och en inre produkt på $C(0, b)$ sådan att polynomen $2 - t$ och $1 + t$ blir ortogonala mot varandra i det inreproduktrum som denna inre produkt definierar.

6. (5p) Bestäm, alternativt visa att det inte finns några, linjära avbildningar A och B från R^4 till R^4 sådana att A:s och B:s kärnor är, respektive,

$$\ker(A) = \operatorname{span}\{2, 0, 0, 1\}, \qquad \ker(B) = \operatorname{span}\{(1, 1, 2, -1)\},$$

och B:s och den samma satta avbildning $B \circ A$:s bildrum är,

$$\operatorname{Im}(B) = \operatorname{span}\{(2, 1, 3, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 2)\},$$

respektive,

$$\operatorname{Im}(B \circ A) = \operatorname{span}\{(2, 1, 4, 2), (1, -1, 2, -1)\}.$$

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) (ON-system) Låt L vara delsrummet

$$L = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$$

till R^4. Låt $\bar{v} = (1, 2, 3, 4)$ och $\bar{u} = (4, 3, 2, 1)$. Undersök om det finns det någon bijektiv linjär avbildning A som avbildar L på L:s ortogonala komplement $L^\perp$, och $L^\perp$ på L, samt $\bar{u}$ på $\bar{v}$ och $\bar{v}$ på $\bar{u}$.

   (b) (3p) Vad gäller generellt för motsvarande problem i R^n med ett delrum L, dess ortogonala komplement $L^\perp$ och två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

8. (5p) Låt $\mathbf{I}$ beteckna identitetsmatrisen med n rader och n kolonner och låt $\mathbf{J}$ beteckna en matris av samma format bestående av enbart ettor. Låt $\mathbf{A}$ vara en matris, med minst lika många kolonner som rader, och sådan att

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{J} + \lambda\mathbf{I},$$

för något reellt tal λ. Visa på vilket sätt matrisen $\mathbf{A}$:s rang beror på värdet på λ.