Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 12 mars 2013 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Generellt gäller vid kursen SF1604 för F och D att bonuspoäng får användas vid det första ordinarie tentamenstillfället och vid första ordinarie omtentamen, dvs för F vid decembertentan och junitentan samt för D vid marstentan och junitentan.

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ vara matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2p) Bestäm $\mathbf{A}^{-1}$.

   (b) (1p) Bestäm $\det(\mathbf{A})$.

   (c) (1p) Bestäm en matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}$.

   (d) (1p) Lös matrisekvationen $(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\mathbf{A}^T = (1 \;\; 2 \;\; 4)$.

2. För den linjära avbildningen A gäller att $A(1,0,0) = (2,1,0)$, $A(0,1,1) = (1,-1,2)$ och $A(0,1,2) = (0,-3,4)$.

   (a) (2p) Bestäm A:s matris relativt standardbasen.

   (b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna (”kernel”) samt dimensionen för A:s bildrum (”range”).

   (c) (1p) Är A surjektiv, injektiv och/eller bijektiv.

3. (ON-system) Bektrakta punkterna $P = (3, 4, -2)$, $Q = (2, 4, -3)$ och $R = (2, 3, -1)$ i vår 3-dimensionella rymd. Låt ℓ beteckna den räta linje som innehåller punkterna P och R. Låt θ beteckna den spetsiga vinkeln mellan linjen ℓ och den räta linje som innehåller punkterna Q och R.
   (a) (3p) Bestäm cosinus för vinkeln θ.
   (b) (2p) Bestäm koordinaterna för en punkt R', skild från R, på linjen ℓ sådan att den spetsiga vinkeln mellan linjen ℓ och den räta linje som innehåller punkterna Q och R' också är θ.

DEL II

4. (5p) (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 2, 3, 4, 5)$ på nollrummet till matrisen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$
5. (5p) För vilka vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ gäller att $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{u} = \bar{v}$?
6. (5p) Bestäm samtliga symmetriska 3×3-matriser vars egenvärden är -1 och 0 och två av matrisernas egenvektorer är $(1\ \ 0\ \ 2)^T$ och $(2\ \ 5\ \ -1)^T$ varav den sistnämnda hör till egenvärdet -1.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) Bestäm dimension hos det minsta delrum till R^5 som innehåller både nollrummet till både matrisen $\mathbf{A}$ och nollrummet till matrisen $\mathbf{B}$ nedan
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
   (b) (3p) Härled en formel för dimensionen hos det minsta delrum till R^m som innehåller de bägge nollrummen till en $n \times m$-matris $\mathbf{C}$ och en $n' \times m$-matris $\mathbf{D}$. Formulera ditt resultat som en sats, ge ett bevis för satsen samt illustrera satsen med ett lämpligt exempel.
   Satsen skall kunna tillämpas av en person som kan beräkna ranger av matriser och ditt exempel skall visa hur satsen därvidlag används.
8. Låt V vara ett vektorrum. För en linjär avbildning A från V till sig själv, det vill säga, $A : V \to V$, låter vi A^n beteckna $A \circ A \circ \cdots \circ A$ (n stycken A:n), samt låter $d_n(A)$ beteckna dimensionen av bildrummet (”the range”) till A^n.
   (a) (2p) Bestäm en linjär avbildning $A : R^3 \to R^3$ sådan att $d_1(A) = 2$, och både A^2:s och A^3:s bildrum (”range”) är span$\{(1, 2, 3)\}$.
   (b) (3p) Låt nu V vara ett vektorrum, vilket som helst. Om $A : V \to V$ vad kan då sägas allmänt om den oändliga sekvensen
$$d_1(A),\ d_2(A),\ d_3(A),\ \ldots ?$$
   (Antalet poäng sätts utifrån hur fullständigt ditt svar och din motivering är.)