

Matematiska Institutionen,  
KTH

**Problem till övning nr 11 den 26 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 13.**

1. (E) Låt  $\mathbf{A}$  beteckna nedanstående matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till  $\mathbf{A}$ . Diagonalisera matrisen  $\mathbf{A}$ , Bestäm  $\mathbf{A}^{1023}$  samt bestäm

$$\mathbf{A}^{366} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. (D) Vektorerna  $\bar{u} = (1, 0, 1)$ ,  $\bar{v} = (0, 2, -3)$  och  $\bar{w} = (2, 1, 0)$  är egenvektorer till matrisen  $\mathbf{A}$  hörande till egenvärdena  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 0$  och  $\lambda = 1$ , respektive. Bestäm matrisen  $\mathbf{A}$ , samt bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen  $\mathbf{A}^5$ .
3. (D) Bestäm samtliga egenvärden med tillhörande egenrum till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm också  $\mathbf{A}^n$  för  $n = 2, 3, 4, \dots$

4. (D) Kan en kvadratisk matris vara inverterbar om ett av matrisens egenvärden är lika med 0?
5. (E) Genomför en ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

6. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

**SVAR**

1. Eigenvärden är  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  och  $\lambda = -1$ , med tillhörande egenrum  $E_0 = \text{span}\{(0, 1, 2)\}$ ,  $E_1 = \text{span}\{(1, 2, 4)\}$  och  $E_{-1} = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$ . Med

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

så har  $\mathbf{A}$  diagonaliseringen  $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$ . Vidare är  $\mathbf{A}^{1023} = \mathbf{A}$  samt

$$\mathbf{A}^{366} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrisen  $\mathbf{A}^5$  har eigenvärdena  $\lambda = 32$ ,  $\lambda = 0$  och  $\lambda = 1$  med tillhörande egenrum

$$E_{32} = \text{span}\{(1, 0, 1)\}, \quad E_0 = \text{span}\{(0, 2, -3)\}, \quad E_1 = \text{span}\{(2, 1, 0)\}.$$

3. Enda eigenvärdet är  $\lambda = 0$  med tillhörande egenrum  $E_0 = \text{span}\{(1, 0, 0)\}$ .

4. Nej.

5. Med  $\mathbf{D}$  och  $\mathbf{Q}$  enligt nedan

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

så är  $\mathbf{Q}$  en ortogonalmatrix och  $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$  en ortogonal diagonalisering av  $\mathbf{A}$ .