

Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 12 den 1 mars, Linjär algebra D1, SF1604, vt 13.

1. (E) Visa att formeln

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

gäller för $n = 1, 2, \dots$

2. (C) Låt $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ och för $n = 3, 4, \dots$ låt

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Visa att $a_n \leq 3^n$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

3. (D) Visa att heltalet 6 delar $n^3 + 5n$ för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$

4. (E) Vilka av följande kvadratiske former är positivt definita?

(a) $Q(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(c) $Q(x, y, z) = xy + 100z^2$.

5. (D) För vilka värden på parametern a är

$$Q(x, y, z) = (x + y + z)^2 + (2x + y + 3z)^2 + (y + az)^2,$$

en positivt definit kvadratisk form.

6. (E) Bestäm en koordinattransformation som överför nedanstående kvadratiske form på huvudaxelform

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 10xy - 4xz + 4yz.$$

Är den kvadratiske formen positivt definit?

7. (E) – (A) Valda uppgifter från tentamensskrivningen den 9 juni 2011 som man hittar på adressen <http://www.math.kth.se/math/GRU/TENTOR.pdf/5B1109.pdf/SF1604.20110609.Text.pdf>.

SVAR

1. –
2. –
3. –
4. (a) Positivt definit.
(b) Positivt semidefinit.
(c) Indefinit.
5. $a \neq -1$.
6. Nedanstående matris \mathbf{Q} beskriver en koordinattransformation som överför den givna kvadratiska formen på huvudaxelform:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Den kvadratiska formen är positivt semidefinit.