

Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 3 den 25 januari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 13.

1. (E) Bestäm ett tal a sådant att vektorn $(1, 1, a)$ blir en så kallad linjärkombination av vektorerna $(1, -1, 3)$ och $(2, 1, 0)$, dvs bestäm ett tal a så att det finns reella tal λ_1 och λ_2 sådana att

$$(1, 1, a) = \lambda_1(1, -1, 3) + \lambda_2(2, 1, 0).$$

2. (E) Visa att punkterna $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 0)$ och $(3, -1, -2)$ ligger i rät linje, till exempel genom att jämföra vektorerna mellan dessa punkter.
3. (E) Låt $\bar{u} = (1, 1, -1)$ och $\bar{v} = (2, 3, 1)$ samt antag att vektorn \bar{w} är sådan att $\bar{v} \cdot \bar{w} = -2$ och att vektorerna \bar{u} och \bar{w} är vinkelräta mot varandra, $\bar{u} \perp \bar{w}$. Bestäm

$$\bar{u} \cdot \bar{v}, \quad \bar{v} \cdot \bar{u}, \quad (\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (3\bar{v} - 5\bar{w}), \quad \|\bar{u}\|,$$

samt cosinus för vinkeln mellan vektorerna \bar{u} och \bar{v} .

4. (E) Visa att triangeln med hörn i punkterna $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$ och $(2, 1, 1)$ är rätvinklig. Bestäm samtliga vinklar, triangelns omkrets och area.
5. (E) Låt $\bar{u} = (2, 3, -1)$ och $\bar{v} = (2, 1, 1)$. Bestäm längden av projektionen av vektorn \bar{u} på vektorn \bar{v} .
6. (E) En rät linje ℓ innehåller punkterna $P = (1, 0, -1)$ och $Q = (1, 2, 4)$. Bestäm en parameterform för linjen. Avgör om punkten $(1, -2, -6)$ tillhör linjen. Bestäm den punkt på linjen som ligger mitt emellan punkterna P och Q .
7. Låt $\bar{u} = (0, 1, 2)$ och $\bar{v} = (1, -1, -2)$. Antag att $\bar{v} \times \bar{w} = (3, 1, 1)$.

- (a) (E) Bestäm

$$\bar{u} \times \bar{v}, \quad \bar{w} \times \bar{v}, \quad \bar{w} \times \bar{w}, \quad (3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v}, \quad \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$$

- (b) (B) Räcker den givna informationen för att bestämma $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$ och $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$.

- (c) (C) Finns det någon vektor \bar{z} sådan att $\bar{v} \times \bar{z} = (2, 2, 1)$.

8. (E) Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$ and $(1, 3, 1)$.
9. (E) Ett plan π innehåller punkterna $R = (1, 1, 1)$, $S = (2, 3, 0)$ och $T = (0, 1, 2)$. Bestäm en normal till planet π . Bestäm planets ekvation. Avgör om punkten $(3, 2, 1)$ tillhör planet. Bestäm ytterligare tre punkter i planet.
10. (E) Bestäm skärningspunkten mellan linjen ℓ i uppgift 6 och planet π i uppgift 9.
11. (C) Undersök om det går att hitta ett tal a sådant att punkterna $(2, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 2, 2)$ och $(3, 2, a)$ ligger i samma plan.
12. (B) Låt $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)$ och $\bar{u} \times \bar{v} = (z_1, z_2, z_3)$. Visa att

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

om och endast om vektorerna \bar{u} och \bar{v} är parallella.

13. (C) För vilka av uppgifterna ovan krävs att koordinaterna är givna i ett ON-system för att svaret skall vara entydigt?
14. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $a = -1$
2. -
3. $\bar{u} \cdot \bar{v} = 4$, $\bar{v} \cdot \bar{u} = 4$, $(\bar{u} + 2\bar{v}) \cdot (3\bar{v} - 5\bar{w}) = 116$, $\|\bar{u}\| = \sqrt{3}$. Cosinus för vinkeln mellan vektorerna \bar{u} och \bar{v} är $4/\sqrt{42}$.
4. Vinklarna är $\pi/2$, $\pi/4$ och $\pi/4$. Två sidor har längden $\sqrt{2}$ och en sida har längden 2. Arean är lika med 1.
5. $\sqrt{6}$
6. Parameterform $(x, y, z) = (1, 2, 4) + t(0, 2, 5)$. Mittpunkt är $(1, 1, 3/2)$. Ja, den givna punkten tillhör linjen.
7. $\bar{u} \times \bar{v} = (0, 2, -1)$, $\bar{w} \times \bar{v} = (-3, -1, -1)$, $\bar{w} \times \bar{w} = (0, 0, 0)$, $(3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v} = (21, 13, 4)$, $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (-1, 6, -3)$. Den givna informationen räcker varken för att bestämma $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$ eller $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$. Finns ingen vektor \bar{z} sådan att $\bar{v} \times \bar{z} = (2, 1, 1)$.
8. $\frac{1}{2}\sqrt{21}$
9. Normal $(1, 0, 1)$. Planets ekvation $(x - 1) + 0(y - 1) + (z - 1) = 0$ eller hyfsad $x + z = 2$. Punkten $(3, 2, 1)$ tillhör inte planet. Men t ex punkterna $(2, 0, 0)$, $(2, 7, 0)$ och $(3, -13, -1)$ gör det.
10. $(1, 4/5, 1)$.
11. $a = 0$.
12. -
13. 3, 4, 5, 7, 8, 9.