

Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 5 den 5 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 13.

1. (E) Undersök om $\bar{u} = (3, 1, 1, 1)$ tillhör det delrum L till R^4 som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 2, 1)$ och $(1, 1, 1, 1)$, med andra ord om \bar{u} tillhör det linjära höljet

$$L = \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1)\}.$$

Om svaret är ja, skriv då \bar{u} som en linjärkombination av 4-tiplarna $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 2, 1)$ och $(1, 1, 1, 1)$.

2. (E) Visa att vektorerna $\bar{u} = (1, 0, -3)$, $\bar{v} = (1, -2, 1)$ och $\bar{w} = (0, 1, -2)$ är tre linjärt beroende vektorer i R^3 . Gör en geometrisk beskrivning av detta faktum och skriv \bar{u} som en linjärkombination av \bar{v} och \bar{w} . Kan \bar{v} skrivas som en linjärkombination av \bar{u} och \bar{w} ?
3. (E) Visa att vektorerna $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{e}_2 = (1, 2, 3)$ och $\bar{e}_3 = (1, 3, 2)$ bildar en bas för R^3 . Bestäm koordinaterna för vektorerna \bar{e}_1 , \bar{e}_2 och \bar{e}_3 samt vektorn $\bar{u} = (3, 6, 0)$ i denna bas.
4. (D) Mängden av alla lösningar till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

bildar ett delrum L till R^4 . Bestäm en bas för detta delrum L samt ange dimensionen av delrummet L . Ange även tre vektorer i R^4 som inte tillhör L .

5. (D) Visa att mängden av alla 4-tiplar (x_1, x_2, x_3, x_4) som satisfierar ekvationen

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1$$

INTE bildar ett delrum till R^4 .

6. (B) Visa att mängden av alla oändliga talföljder $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ utgör ett vektorrum V över de reella talen om addition av vektorer och multiplikation av en vektor med ett reellt tal λ definieras

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) + (y_0, y_1, y_2, \dots) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

resp

$$\lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Låt L beteckna mängden av alla talföljder $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ sådana att talen i talföljden efter ett tag samtliga blir noll, dvs mer precist, till varje sådan vektor \bar{x} finns ett tal $N_{\bar{x}}$ sådant att $x_i = 0$ för alla $i \geq N_{\bar{x}}$. Är L ett delrum till vektorrummet V .

7. Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.

SVAR

1. $(3, 1, 1, 1) = (1, 0, 1, 0) - (0, 1, 2, 1) + 2(1, 1, 1, 1)$.
2. $\bar{u} = \bar{v} + 2\bar{w}$. Ja, $\bar{v} = \bar{u} - 2\bar{w}$.
3. \bar{e}_1 har koordinaterna $(1, 0, 0)$, \bar{e}_2 har koordinaterna $(0, 1, 0)$ och \bar{e}_3 har koordinaterna $(0, 0, 1)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Vektorn $(3, 6, 0)$ har koordinaterna $(3, -3, 3)$ i denna bas.
4. Till exempel bildar $(-9, 4, 1, 0)$ och $(-3, 2, 0, 1)$ en bas så $\dim(L) = 2$. Till exempel vektorerna $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ och $(0, 0, 1, 0)$ tillhör inte L .
5. -
6. -