

Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 7 den 12 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 13.

1. (ON-system) En triangel i R^4 har hörn i punkterna $(3, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 3)$ och origo. Visa att triangeln är rätvinklig. Bestäm triangelns samtliga vinklar, omkrets och area.

2. I R^3 inför vi den inre produkten

$$\langle \bar{x} | \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + 5x_2 y_2 + 2x_3 y_3 \quad \text{där} \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \bar{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Låt \bar{e}_1 , \bar{e}_2 och \bar{e}_3 vara standardbasen i R^3 . Bestäm längden av dessa basvektorer. Är \bar{e}_1 , \bar{e}_2 och \bar{e}_3 parvis ortogonala. Bestäm en ON-bas i det inre produktrum som definieras av denna inre produkt.

3. (ON-system) Betrakta delrummet $L = \text{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ till R^4 .

(a) Bestäm ortogonala komplementet L^\perp till L i R^4 .

(b) Bestäm en ortogonalbas i L och en ortogonalbas i L^\perp .

(c) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 2, 3, 4)$ på L .

(d) Använd lösningen till föregående deluppgift för att bestämma projektionen av $(1, 2, 3, 4)$ på L^\perp .

(e) Skriv $(1, 2, 3, 4)$ som en summa av en vektor i L och en vektor i L^\perp .

4. I det vektorrum, som består av alla funktioner som är kontinuerliga på intervallet $[-1, 1]$, definierar vi en inre produkt genom

$$\langle f(t) | g(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Visa att polynomen $p(t) = 1 - 3t^2$ och $q(t) = 2t$ är ortogonala mot varandra. Bestäm också $\|q(t)\|$. Låt $L = \text{span}\{1 - 3t^2, t\}$. Bestäm projektionen av funktionen $f(t) = 1$ på L .

5. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $\sqrt{10}, \sqrt{10}, \sqrt{20}, \pi/4, \pi/4, \pi/2$.
2. $\|\bar{e}_1\| = 1, \|\bar{e}_2\| = \sqrt{5}, \|\bar{e}_3\| = \sqrt{2}$. De är parvis ortogonala. En ON-bas ges av $\bar{e}_1, \sqrt{1/5} \bar{e}_2, \sqrt{1/2} \bar{e}_3$.
3. (a) $\text{span}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$
(b) Ortogonalbas i L , t ex $(1, 0, 1, 0)$ och $(0, 1, 0, 1)$, för L^\perp , se ovan.
(c) $(2, 3, 2, 3)$.
(d) $(-1, -1, 1, 1)$.
(e) $(1, 2, 3, 4) = (2, 3, 2, 3) + (-1, -1, 1, 1)$.
4. $\sqrt{4/3}$. Projektionen är funktionen $g(t) = 0$.