Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 8 den 15 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 13.

1. Lös i minstakvadratmening ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. Bestäm den räta linje $y = kx + m$ som "bäst" ansluter till punkterna $(x, y) = (1\ ,\ 2.1)$, $(x, y) = (2\ ,\ 4.9)$ och $(x, y) = (3\ ,\ 8.1)$.

3. Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara standardbasen B i R^3 och låt en annan bas B' utgöras av vektorerna $\bar{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (1, 2, 3)$ och $\bar{f}_3 = (1, 2, 2)$.
   (a) Bestäm transitionsmatrisen ${}_B\mathbf{T}_{B'}$ som beskriver sambandet mellan koordinaterna $\bar{u} = (x_1', x_2', x_3')$ för vektorn $\bar{u}$ i basen B', och koordinaterna $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$ för samma vektor $\bar{u}$ i basen B genom
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {}_B\mathbf{T}_{B'} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$
   (b) Bestäm transitionsmatrisen ${}_{B'}\mathbf{T}_B$.
   (c) Bestäm koordinaterna i basen B' för 3-tippeln $\bar{u} = (1, 2, 3)$.

4. Låt B' vara som i uppgift 3 och låt B'' beteckna basen $\bar{g}_1 = (0, 1, 1)$, $\bar{g}_2 = (1, 1, 0)$ och $\bar{g}_3 = (1, 0, 1)$ för R^3. Bestäm transitionsmatriserna ${}_{B'}\mathbf{T}_{B''}$ och ${}_{B''}\mathbf{T}_{B'}$.

5. Låt B' och B'' vara två olika baser för R^3. Antag att $\bar{u}$ har koordinaterna $(1, 0, 1)$ i basen B' och koordinaterna $(2, -1, 0)$ i basen B'', och att $\bar{v}$ har koordinaterna $(2, 1, -1)$ i basen B' och koordinaterna $(0, -1, 1)$ i basen B'', och att $\bar{w}$ har koordinaterna $(0, 0, 1)$ i basen B' och koordinaterna $(1, -1, 1)$ i basen B''. Vektorn $\bar{x}$ har koordinaterna $(1, 2, 3)$ i basen B'. Bestäm koordinaterna för $\bar{x}$ i basen B''.

6. Bestäm samtliga värden på de reella talen a, b, c och d sådana att matrisen
   $$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & a & b \\ \sqrt{8}/3 & c & d \end{pmatrix}$$
   blir en ortogonalmatris.

7. Undersök om det finns reella tal a, b, c, d, e, f, g och h sådana att matrisen
   $$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 2 \\ f & g & h \end{pmatrix}$$
   blir en ortogonalmatris.

8. Visa att om $\mathbf{Q}$ och $\mathbf{R}$ är ortogonalmatriser så är även $\mathbf{QR}$ och $\mathbf{Q}^T\mathbf{R}^{-3}$ ortogonalmatriser.

9. (ON-system) Låt $\mathbf{Q}$ vara en av de ortogonalmatriser du fann i uppgift nummer 6. Låt $\bar{u} = (1\ \ 1\ \ 1)$ och $\bar{v} = (0\ \ 1\ \ 1)$. Bestäm längden av vektorerna $\bar{u}\mathbf{Q}$ och $\bar{v}\mathbf{Q}$ och vinkeln mellan dessa vektorer.

10. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $x = 1$, $y = 1/2$.

2. $y = 3x - 2.9/3$

3. (a) Matrisen
$$_{B}\mathbf{T}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
(b)
$$_{B'}\mathbf{T}_{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
(c) $(1, 1, 0)$

4.
$$_{B'}\mathbf{T}_{B''} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. $(2, -7, 10)$

6. $(a, b, c, d) = \pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{18}, -1/\sqrt{18})$.

7. Finns ej

8. –

9. Längderna $\sqrt{3}$ resp $\sqrt{2}$, vinkeln är $\arccos(\frac{2}{\sqrt{6}})$