Matematiska Institutionen
KTH

Lösing till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 4 juni 2013
kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

I allmänhet gäller vid kursen SF1604 för F och D att bonuspoäng får användas vid det första ordinarie tentamenstillfället och vid första ordinarie omtentamen, dvs för F vid decembertentan och junitentan samt för D vid marstentan och junitentan.

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Givet är systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

(a) (1p) Bestäm de värden på a och b för vilka systemet ovan har en och endast en lösning.

Lösning. Vi bestämmer först koefficientmatrisens determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = -2(a-1) - 2 = -2a$$

Enligt välkänd sats har då systemet unik lösning för varje högerled om $-2a \neq 0$. Alltså

SVAR: $a \neq 0$.

(b) (2p) För vilka värden på a och b saknar systemet lösning.

Lösning. Enligt lösningen ovan har vi att undersöka systemet när $a = 0$. Vi finner då att

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 0z & = & b \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & b \end{array}\right. \sim$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1+2b \\ & & y & - & z & = & b \end{array}\right.$$

varur vi får

SVAR: När $a = 0$ och $b \neq -1/2$ saknar systemet lösning.

(c) (2p) Ange samtliga lösningar till systemet i de fall systemet har mer än en lösning.

Lösning. Vi löser systemet när $a = 0$ och $b = -1/2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & y & - & z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & \frac{3}{2} \\ & & y & - & z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

För ett godtyckligt valt $z = t$ får vi nu

SVAR: $(x, y, z) = (3/2 - 2t, -1/2 + t, t)$, där t kan väljas godtyckligt.

2. Givet är matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) (3p) Bestäm $\mathbf{A}$:s samtliga egenvärden och tillhörande egenvektorer.

Lösning. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2,$$

vars rötter är $\lambda = 2$ och $\lambda = -1$. Bestämmer nu tillhörande egenrum. De utgöres av lösningarna till respektive system nedan:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 0 \\ 2 & - & 4y & = & 0 \end{array}\right.$$

med lösningsrummet $E_2 = \text{span}\{(2, 1)\}$ och

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 2y & = & 0 \\ 2 & - & y & = & 0 \end{array}\right.$$

med lösningsrummet $E_{-1} = \text{span}\{(1, 2)\}$.

(b) (2p) Diagonalisera matrisen $\mathbf{A}$.

Lösning. All nödvändig indata finns i svaret ovan så svaret blir

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

3. (ON-system) Planet π innehåller en punkt med koordinaterna är $(1,2,-1)$ samt en linje med parameterformen $(x,y,z) = (0,1,1) + t(2,1,0)$. Linjen ℓ innehåller punkterna $(0,1,2)$ och $(2,3,0)$. Ange på ett ”lämpligt sätt” ℓ:s vinkel med planet π och bestäm ℓ:s skärningspunkt med planet π. (Man kan få max 3p för en korrekt lösning till endast ett av dessa problem)

Lösning. Bestämmer först ytterligare en riktningsvektor för π, tex vektorn mellan punkterna $(1,2,-1)$ och $(0,1,1)$ i planet, dvs $\bar{u} = (1,1,-2)$. Kryssprodukten av denna vektor med linjens riktningsvektor $(2,1,0)$ ger planets normal $\bar{n}$ till

$$\bar{n} = (1,1,-2) \times (2,1,0) = (2,-4,-1),$$

varur planets ekvation härleds till

$$2x - 4(y-1) - (z-1) = 0.$$

Vinkeln med planet är nog lika med $\pi/2$ minus vinkeln θ mellan den givna linjens riktningsvektor $\bar{v} = (2,3,0) - (0,1,2) = (2,2,-2) = 2(1,1,-1)$ och planets normal, som fås ur sambandet

$$\cos(\theta) = \frac{(1,1,-1)\cdot(2,-4,-)}{|(1,1,-1)|\,|(2,-4,-1)|} = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{21}}$$

Den sökta vinkeln är alltså

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{\sqrt{63}}$$

Vi substituerar koordinaterna för punkter på givan linjen

$$(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,1,-1) = (t, 1+t, 2-t)$$

i planets ekvation i syfte att hitta det t-värde för vilket en punkt på linjen tillhör planet:

$$0 = 2t - 4(1+t-1) - (2-t-1) = -t - 1.$$

Skärningspunkten ges då av $t = -1$ och dess koordinater är $(-1,0,3)$.

DEL II

4. (5p) En talföljd a_0, a_1, a_2, ... definieras genom att $a_0 = 2$ och $a_1 = 4$ samt att

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2},$$

för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Visa med ett induktionsbevis att $a_n = (-1)^n + 5^n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Lösning. Låt $b_n = (-1)^n + 5^n$, för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi visar att den rekursivt definierade talföljden a_n är lika med talföljden b_n.

Detta är uppenbarligen sant när $n = 0$ och $n = 1$ ty $b_0 = (-1)^0 + 5^0 = 2$ och $b_1 = (-1)^1 + 5^1 = 4$.

Antag nu att vi visat att $b_n = a_n$ för alla $n < k$, för något tal k. Då gäller

$$a_k = 4a_{k-1} + 5a_{k-2} = 4b_{k-1} + 5b_{k-2} = 4((-1)^{k-1} + 5^{k-1}) + 5((-1)^{k-2} + 5^{k-2}) =$$

$$= (-1)^{k-2} + 25 \cdot 5^{k-2} = (-1)^k + 5^k = b_k.$$

Vi kan alltså tillämpa induktionsprincipen för att verifiera att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

5. (5p) Låt $C(0, b)$ beteckna rummet av alla funktioner i en variabel t som är kontinuerliga på intervallet $(0, b)$. Bestäm ett tal b och en inre produkt på $C(0, b)$ sådan att polynomen $2 - t$ och $1 + t$ blir ortogonala mot varandra i det inreproduktrum som denna inre produkt definierar.

Lösning. Vi ansätter den inre produkten

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^b f(t)g(t)\mathrm{dt}$$

och bestämmer b så att de givna polynomen blir ortogonala mot varandra:

$$0 = \int_0^b (1 + t)(2 - t)\mathrm{dt} = \int_0^b 2 + t - t^2 = 2b + \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} = \frac{b}{3}(6 + \frac{3}{2}b - b^2)$$

Talet b är inte noll eftersom vi då inte skulle ha en inre produkt. Så vi får ekvationen

$$0 = b^2 - \frac{3}{2}b - 6 = (b - \frac{3}{4})^2 - 6 - \frac{9}{16} = (b - \frac{3}{4})^2 - \frac{105}{16}.$$

Vi antar att $b > 0$ så

SVAR: T ex $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^b f(t)g(t)\mathrm{dt}$ där $b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}$

6. (5p) Bestäm, alternativt visa att det inte finns några, linjära avbildningar A och B från R^4 till R^4 sådana att A:s och B:s kärnor är, respektive,

$$\ker(A) = \mathrm{span}\{2, 0, 0, 1\}, \qquad \ker(B) = \mathrm{span}\{(1, 1, 2, -1)\},$$

och B:s och den samma satta avbildning $B \circ A$:s bildrum är,

$$\mathrm{Im}(B) = \mathrm{span}\{(2, 1, 3, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 2)\},$$

respektive,

$$\operatorname{Im}(B \circ A) = \operatorname{span}\{(2, 1, 4, 2), (1, -1, 2, -1)\}.$$

Lösning. Sätt

$$L = \operatorname{span}\{(2, 1, 3, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 2)\},$$

och

$$K = \operatorname{span}\{(2, 1, 4, 2), (1, -1, 2, -1)\}.$$

Vi visar först att K är ett delrum till L. Vi ser omedelbart att

$$(2, 1, 4, 2) = (2, 1, 3, 1) + (0, 0, 1, 1)$$

som ju tillhör L. Vi undersöker om det finns tal λ_1, λ_2 och λ_3 sådana att

$$(1, -1, 2, -1) = \lambda_1(2, 1, 3, 1) + \lambda_2(0, 0, 1, 1) + \lambda_3(1, 2, 1, 2),$$

vilket ger ett linjärt ekvationssystem i de tre obekanta λ_1, λ_2 och λ_3 som löses på sedvanligt sätt, med bland annat lösningen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ och $\lambda_3 = -1$.

Varje linjärkombination av $(2, 1, 4, 2)$ och $(1, -1, 2, -1)$ tillhör då också L, och altså är K ett delrum till L. Eftersom $(0, 0, 1, 1)$ inte kan fås som linjärkombination av $(2, 1, 4, 2)$ och $(1, -1, 2, -1)$ så är $(0, 0, 1, 1)$, $(2, 1, 4, 2)$ och $(1, -1, 2, -1)$ tre stycken linjärt oberoende vektorer i L. Vektorrumet L spänns upp av tre vektorer och har alltså dimension högst tre. Alltså bildar de tre linjärt oberoende vektorerna $(0, 0, 1, 1)$, $(2, 1, 4, 2)$ och $(1, -1, 2, -1)$ i L en bas för L och L har dimension tre.

Nu definierar vi avbildningarna A och B. Det räcker att specificera deras verkan på baser för R^4.

$$\begin{cases} A(1, 0, 0, 0) &= (1, 0, 0, 0) \\ A(0, 1, 0, 0) &= (0, 1, 0, 0) \\ A(0, 0, 1, 0) &= (1, 1, 2, -1) \\ A(2, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \end{cases} \qquad \begin{cases} B(1, 0, 0, 0) &= (2, 1, 4, 2) \\ B(0, 1, 0, 0) &= (1, -1, 2, -1) \\ B(0, 0, 1, 0) &= (0, 0, 1, 1) \\ B(1, 1, 2, -1) &= (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

För den sammansatta avbildningen gäller då att

$$\begin{cases} B \circ A(1, 0, 0, 0) &= (2, 1, 4, 2) \\ B \circ A(0, 1, 0, 0) &= (1, -1, 2, -1) \\ B \circ A(0, 0, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ B \circ A(2, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

och de givna kraven på den sammansatta avbildningen är uppfyllda.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) (ON-system) Låt L vara delsrummet

$$L = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\}$$

till R^4. Låt $\bar{v} = (1,2,3,4)$ och $\bar{u} = (4,3,2,1)$. Undersök om det finns det någon bijektiv linjär avbildning A som avbildar L på L:s ortogonala komplement $L^\perp$, och $L^\perp$ på L, samt $\bar{u}$ på $\bar{v}$ och $\bar{v}$ på $\bar{u}$.

Lösning. Vi bestämmer först projektionen av vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ på delrummet L. Eftersom $(1,1,1,1)$ och $(1,-1,1,-1)$ bildar en ortogonalbas för L ger projektionslemmat att

$$\mathrm{Proj}_L(\bar{u}) = \frac{(1,2,3,4)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1)+$$
$$+\frac{(1,2,3,4)\cdot(1,-1,1,-1)}{(1,-1,1,-1)\cdot(1,-1,1,-1)}(1,-1,1,-1) =$$
$$= \frac{5}{2}(1,1,1,1) - \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) = (2,3,2,3)$$

och med liknande räkningar att

$$\mathrm{Proj}_L(\bar{v}) = \frac{5}{2}(1,1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,1-1) = (3,2,3,2).$$

Vi uttrycker nu $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som summor av vektorer i L och $L^\perp$:

$$\bar{u} = (1,2,3,4) = (2,3,2,3) + (-1,-1,1,1),$$

$$\bar{v} = (4,3,2,1) = (3,2,3,2) + (1,1,-1,-1).$$

En linjär avbildning A som avbildar L på $L^\perp$ och $\bar{u}$ på $\bar{v}$ och $\bar{v}$ på $\bar{u}$ måste avbilda $\bar{u}$:s komposant i $\bar{L}$ på $\bar{v}$:s komposant i $L^\perp$ och $\bar{v}$:s komposant i L på $\bar{u}$:s komposant i $L^\perp$, dvs

$$A(2,3,2,3) = (1,1,-1,-1), \quad A(3,2,3,2) = (-1,-1,1,1).$$

Vi ser då att

$$A(5,5,5,5) = A(2,3,2,3) + A(3,2,3,2) = (0,0,0,0).$$

Den linjära avbildningen A kan inte vara bijektiv eftersom även $A(0,0,0,0) = (0,0,0,0)$.

(b) (3p) Vad gäller generellt för motsvarande problem i R^n med ett delrum L, dess ortogonala komplement $L^\perp$ och två vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Lösning. Generellt gäller för en bijektiv avbildning som avbildar ett delrum L surjektivt på ett delrum K att $\dim(K) = \dim(L)$. Således med givna indata måste

$$\dim(L) = \dim(L^\perp).$$

Eftersom

$$\dim(L) + \dim(L^\perp) = \dim(R^n) = n$$

måste med nödvändighet

$$\dim(L) = \dim(L^\perp) = \frac{n}{2}.$$

Vi skriver nu vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ som summor av vektorer i L resp $L^\perp$, vilket är möjligt enligt projektionslemmat:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \qquad \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2,$$

där $\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in L$ och $\bar{u}_2, \bar{v}_2 \in L^\perp$. Uppspaltningen ovan är unik och då måste

$$A(\bar{u}_1) = \bar{v}_2,\ A(\bar{u}_2) = \bar{v}_1,\ A(\bar{v}_1) = \bar{u}_2,\ A(\bar{v}_2) = \bar{u}_1. \tag{1}$$

Om nu

$$\dim(\mathrm{span}\{\bar{u}_1, \bar{v}_1\}) = \dim(\mathrm{span}\{\bar{u}_2, \bar{v}_2\}) = 2$$

går avbildningen A att skapa. Man utvidgar $\bar{u}_i$ och $\bar{v}_i$. för $i = 1$ resp $i = 2$, till baser för L resp $L^\perp$ och definierar sedan A som i ekvation (1), och låter resterande basvektorer för L avbildas på de övriga basvektorerna för $L^\perp$.
Enda andra möjligt alternativ är att

$$\dim(\mathrm{span}\{\bar{u}_1, \bar{v}_1\}) = \dim(\mathrm{span}\{\bar{u}_2, \bar{v}_2\}) = 1.$$

Då är

$$\bar{v}_1 = \lambda \bar{u}_1, \qquad \bar{v}_2 = \mu \bar{u}_2,$$

för några tal λ och μ. Ekvation (1) ger då

$$\begin{cases} A(\bar{u}_1) &= \mu \bar{u}_2 \\ A(\bar{u}_2) &= \lambda \bar{u}_1 \\ A(\mu \bar{u}_2) &= \bar{u}_1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{u}_1 = A(\mu \bar{u}_2) = \mu A(\bar{u}_2) = \mu \lambda \bar{u}_1.$$

Så nödvändigtvis måste $\mu = 1/\lambda$. Vi betraktar en bas för L innehålande $\bar{u}_1$ och en bas för $L^\perp$ innehålande $\bar{u}_2$. Vi definierar nu en linjär avbildning genom att ange bilden av basvektorerna varvid vi definierar

$$A(\bar{u}_1) = \mu \bar{u}_2, \qquad A(\bar{u}_2) = \lambda \bar{u}_1,$$

samt för övriga basvektorer som i det tidigare fallet. Då får vi att

$$A(\bar{u}) = A(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \mu \bar{u}_2 + \lambda \bar{u}_1 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}$$

och

$$A(\bar{v}) = A(\bar{v}_1) + A(\bar{v}_2) = A(\lambda \bar{u}_1) + A(\mu \bar{u}_2) = \lambda \mu \bar{u}_2 + \mu \lambda \bar{u}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{u}.$$

8. (5p) Låt $\mathbf{I}$ beteckna identitetsmatrisen med n rader och n kolonner och låt $\mathbf{J}$ beteckna en matris av samma format bestående av enbart ettor. Låt $\mathbf{A}$ vara en matris, med minst lika många kolonner som rader, och sådan att

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I},$$

för något reellt tal λ. Visa på vilket sätt matrisen $\mathbf{A}$:s rang beror på värdet på λ.

Lösning. Vi beräknar först determinanten av matrisen $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$: Vi adderar rad efter rad till sista raden vars samtliga element då blir $\lambda + n$. Vi kan bryta ut detta tal ur determinanten och sedan subtrahera den understa raden med ettor från övriga rader i determinanten. Vi får då nollor överallt utom på diagonalen, där samtliga element blir lika med λ, och förutom i sista raden, där samtliga element är ettor. Således har vi

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = (\lambda + n)\lambda^{n-1}.$$

Om $\lambda \neq 0$ och $\lambda \neq -n$ så är $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^T \neq 0$. Enligt känd sats är då kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}^T$ linjärt oberoende. Matrisen $\mathbf{A}$s rang är då lika med antalet rader i $\mathbf{A}$.

Nu till fallen $\lambda = -n$ och $\lambda = 0$.

Beteckna nu $\mathbf{A}$s rader med $\bar{r}_i$, för $i = 1, 2, \ldots, k$. Definition av matrismultiplikation ger att, relativt standardskalärprodukten, så

$$\bar{r}_i \cdot \bar{r}_j = \begin{cases} \lambda + 1 & \text{om} \qquad i = j, \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Alltså kan inte $\lambda = -n$. Ett fall återstår således att undersöka, nämligen $\lambda = 0$. Med standardskalärprodukt gäller då enligt Cauchys olikhet att

$$1 = (\bar{r}_i \cdot \bar{r}_j)^2 \leq |\bar{r}_i|^2 \, |\bar{r}_j|^2 = 1.$$

Vi har således likhet i Cauchys olikhet, vilke inträffar om och endast om de givna vektorerna är parallella. Enda möjligheten i fallet $\lambda = 0$ är således att $\mathbf{A}$s rader är parallella, och dess rang lika med ett.

SVAR: Talet λ kan inte vara negativt. Om $\lambda > 0$ är rangen maximal, om $\lambda = 0$ är rangen lika med 1.