Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 12 mars 2013 kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Generellt gäller vid kursen SF1604 för F och D att bonuspoäng får användas vid det första ordinarie tentamenstillfället och vid första ordinarie omtentamen, dvs för F vid decembertentan och junitentan samt för D vid marstentan och junitentan.

Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ vara matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) (2p) Bestäm $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösning: Vi använder sedvanlig algorithm:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

SVAR:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (1p) Bestäm $\det(\mathbf{A})$.

Lösning Med räkningar enligt ovan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(c) (1p) Bestäm en matris $\mathbf{B}$ sådan att $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}$.

Lösning Vi använder att inversen till $\mathbf{A}^T$ är lika med transponatet av inversen till $\mathbf{A}$ och får då

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 13 \\ 5 & 4 & 9 \\ 22 & 13 & 33 \end{pmatrix}$$

(d) (1p) Lös matrisekvationen $(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)\mathbf{A}^T = (1 \;\; 2 \;\; 4)$.

Lösning. Vi transponerar ekvationen och får då ekvationen $\mathbf{A}(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3)^T = (1 \;\; 2 \;\; 4)^T$ som vi löser med matrisinversen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. För den linjära avbildningen A gäller att $A(1,0,0) = (2,1,0)$, $A(0,1,1) = (1,-1,2)$ och $A(0,1,2) = (0,-3,4)$.

(a) (2p) Bestäm A:s matris relativt standardbasen.

Lösning. Vi använder "Martins metod":

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Så

SVAR:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

Lösning. A:s bildrum är kolonnrummet till matrisen ovan och dess dimension är inte tre eftersom kolonn ett och kolonn två är parallella, men kolonnrummet har dimension två eftersom de två sista kolonnerna spänner upp ett delrum av dimension två. Enligt fundamentalsatsen har då nollrummet dimension ett. Det är lätt att se att $\mathbf{A}(1 \;\; -1 \;\; 0)^T = (0 \;\; 0 \;\; 0)^T$ och därmed kan vi sluta att vektorn $(1,-1,0)$ är en bas för A:s kärna.

(c) (1p) Är A surjektiv, injektiv och/eller bijektiv.

Lösning. A är inte injektiv eftersom dess kärna inte är trivial. Eftersom A avbildar R^3 till R^3 och bildrummet har dimension 2 kan avbildningen intE vara surjektiv. Bijektivitet kräver både injektivitet och surjektivitet, så då är den inte det heller.

3. (ON-system) Bektrakta punkterna $P = (3, 4, -2)$, $Q = (2, 4, -3)$ och $R = (2, 3, -1)$ i vår 3-dimensionella rymd. Låt ℓ beteckna den räta linje som innehåller punkterna P och R. Låt θ beteckna den spetsiga vinkeln mellan linjen ℓ och den räta linje som innehåller punkterna Q och R.

(a) (3p) Bestäm cosinus för vinkeln θ.

Lösning. Vi beräknar först cosinus för vinkeln mellan linjernas riktningsvektorer $PR = (-1, -1, 1)$ och $QR = (0, -1, 2)$. Då

$$\frac{PR \cdot QR}{||PR||\,||QR||} = \frac{(-1, -1, 1) \cdot (0, -1, 2)}{||(-1, -1, -1)||\,||(0, -1, 2)||} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{5}}$$

vilket är ett positivt tal och därför cosinus för en spetsig vinkel.
SVAR: $3/\sqrt{15}$

(b) (2p) Bestäm koordinaterna för en punkt R', skild från R, på linjen ℓ sådan att den spetsiga vinkeln mellan linjen ℓ och den räta linje som innehåller punkterna Q och R' också är θ.

Lösning. Vi projicerar vektorn $-QR$, dvs RQ på linjen ℓ, varvid vi får en vektor $\bar{u}$, som avsatt från punkten R, har sin spets i en punkt S vinkelrätt "under" punkten Q på linjen ℓ. Avsätter vi $\bar{u}$ från S hamnar vi i rätt punkt R', eftersom punkterna Q, R och R' då bildar hörn i en likbent triangel med basen RR'.
Beräkninga av $\bar{u}$:

$$\bar{u} = \frac{PR \cdot RQ}{||PR||^2} PR = \frac{(-1. -1, 1) \cdot (0, 1, -2)}{3}(-1, -1, 1) = (1, 1, -1)$$

Vi får då
SVAR: Sökta punkten R':s koordinater blir

$$OR' = OR + 2\bar{u} = (2, 3, -1) + 2(1, 1, -1) = (4, 5, -3).$$

DEL II

4. (5p) (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 2, 3, 4, 5)$ på nollrummet till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Lösning. Vi vet att nollrummet är radrummets ortogonala komplement så om $\bar{w}$ är projektionen av den givna vektorn $\bar{u} = (1, 2, 3, 4, 5)$ på matrisens radrummet så är $\bar{u} - \bar{w}$ lika med $\bar{u}$:s projektion på nollrummet.

Vi beräknar nu $\bar{w}$, och observerar att matrisens rader är ortogonala mot varandra. Vi får då att w blir

$$\frac{(1,2,3,4,5)\cdot(1,1,1,1,1)}{||(1,1,1,1,1)||^2}(1,1,1,1,1) + \frac{(1,2,3,4,5)\cdot(1,0,2,1,-4)}{||(1,0,2,1,-4)||^2}(1,0,2,1,-4)$$

så

$$\bar{w} = \frac{15}{5}(1,1,1,1,1) + \frac{-9}{22}(1,0,2,1,-4) = \frac{1}{22}(57,66,48,57,102).$$

SVAR: Den sökta projektionen blir

$$(1,2,3,4,5) - \frac{1}{22}(57,66,48,57,102) = \frac{1}{22}(-35,-22,18,40,8)$$

5. (5p) För vilka vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ gäller att $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{u} = \bar{v}$?

Lösning: Generellt gäller att vektorn $\bar{x} \times \bar{y}$ är vinkelrät mot både $\bar{x}$ och $\bar{y}$. För att den givna likheten skall gälla måste alltså $\bar{v}$ vara vinkelrät mot $\bar{u}$. Antag nu $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är två vektorer som är vinkelräta mot varandra. Låt $\bar{e}$ och $\bar{f}$ vara vektorer av längd 1 som är parallella med $\bar{u}$ respektive $\bar{v}$, så

$$\bar{u} = \lambda\bar{e} \qquad \text{och} \qquad \bar{v} = \mu\bar{f}$$

för några reella tal λ och μ. Låt $\bar{g} = \bar{e} \times \bar{f}$, varvid vektorerna $\bar{e}$, $\bar{f}$ och $\bar{g}$ bildar ett högersystem. Då gäller också att

$$\bar{g} \times \bar{e} = \bar{f}.$$

Nu har vi att

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{u} = (\lambda\bar{u} \times \mu\bar{v}) \times \lambda\bar{u} = \lambda\mu(\bar{e} \times \bar{f}) \times \lambda\bar{e} = \lambda^2\mu(\bar{g} \times \bar{e}) = \lambda^2\bar{v}$$

vilket är vektorn $\bar{v}$ precis då aningen $\lambda = \pm 1$, eller $\bar{v} = \bar{0}$.

SVAR: Precis då $\bar{u}$ har längd 1 och $\bar{v}$ är vinkelrät mot $\bar{u}$, eller $\bar{v} = \bar{0}$.

6. (5p) Bestäm samtliga symmetriska 3×3-matriser vars egenvärden är -1 och 0 och två av matrisernas egenvektorer är $(1\ \ 0\ \ 2)^T$ och $(2\ \ 5\ \ -1)^T$ varav den sistnämnda hör till egenvärdet -1.

Lösning. Eftersom matrisen är symmetrisk hör till matrisen en ortogonalbas av egenvektorer. Kryssprodukten av de givna vektorerna är då också en egenvektor:

$$(1,0,2) \times (2,5,-1) = (-10,5,5) = 5(-2,1,1).$$

Det finns totalt tre olika möjligheter för uppsättning av egenrum till matrisen:

(a) $E_{-1} = \operatorname{span}\{(2,5,-1),(1,0,2)\}$ och $E_0 = \operatorname{span}\{(-2,1,1)\}$.

(b) $E_{-1} = \text{span}\{(2,5,-1)\}$ och $E_0 = \text{span}\{(1,0,2),(-2,1,1)\}$.

(c) $E_{-1} = \text{span}\{(2,5,-1),(-2,1,1)\}$ och $E_0 = \text{span}\{(1,0,2)\}$.

Vi kan tolka matrisen som beskrivande en linjär avbildning som avbildar vektorerna ovan på multipler, egenvärdena, av sig själva. Enklast att bestämma matriserna blir då att använda "Martins metod".

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & -2 & -5 & 1 \\ 5 & 10 & 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/6 & -5/6 & 1/6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 2/6 & -1/6 & 5/6 \\ 1 & 0 & 0 & -2/6 & -2/6 & -2/6 \\ 0 & 1 & 0 & -2/6 & -5/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & -2 & -5 & 1 \\ 5 & 10 & 0 & -4 & -10 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & -2/5 & -1 & 1/5 \\ 1 & 2 & 0 & -4/5 & -2 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/6 & -5/6 & 1/6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -1/15 & -1/6 & 1/30 \\ 1 & 0 & 0 & -2/15 & -2/6 & 1/15 \\ 0 & 1 & 0 & -2/6 & -5/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & -2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & -1 & -2 & -5 & 1 \\ 5 & 10 & 0 & -4 & -10 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & -2/5 & -1 & 1/5 \\ 1 & 2 & 0 & -4/5 & -2 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -2/5 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 & -4/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vi får då

SVAR:

$$\begin{pmatrix} -2/6 & -2/6 & -2/6 \\ -2/6 & -5/6 & 1/6 \\ -2/6 & 1/6 & -5/6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2/15 & -2/6 & 1/15 \\ -2/6 & -5/6 & 1/6 \\ 1/15 & 1/6 & 1/30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$$

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (a) (2p) Bestäm dimension hos det minsta delrum till R^5 som innehåller både nollrummet till både matrisen $\mathbf{A}$ och nollrummet till matrisen $\mathbf{B}$ nedan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösning. Bestämmer först nollrummen genom att, med hjälp av Gausselimination t ex, lösa systemen $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ respektive $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

så $\mathbf{A}$:s nollrum blir, (om vi typ sätter $x_4 = t$ och $x_5 = s$ och fortsätter som vanligt),

$$\mathrm{span}\{(-2, 1, -1, 1, 0), (-2, 3, -6, 0, 1)\}$$

Vidare

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -6 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så $\mathbf{B}$:s nollrum, liksom ovan kan räknas fram till

$$\mathrm{span}\{(6, -3, 1, 0, -4), (11, -2, 0, 1, -6)\}$$

Det minsta delrum L som innehåller dessa linjära höljen måste innehålla alla linjärkombinationer av de fyra generatorerna ovan, dvs

$$L = \mathrm{span}\{(-2, 1, -1, 1, 0), (-2, 3, -6, 0, 1), (6, -3, 1, 0, -4), (11, -2, 0, 1, -6)\}$$

Vi bestämmer nu detta delrums dimension genom att räkna ut rangen för matrisen vars rader utgöres av de fyra generatorerna ovan.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 11 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 13 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & -3 \\ 11 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -6 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De första fyra kolonnerna är linjärt oberoende och matrisen har fyra rader, så den maximala rangen lika med fyra har matrisen.

SVAR: Det sökta delrummet har dimension 4.

(b) (3p) Härled en formel för dimensionen hos det minsta delrum till R^m som innehåller de bägge nollrummen till en $n \times m$-matris $\mathbf{C}$ och en $n' \times m$-matris $\mathbf{D}$. Formulera ditt resultat som en sats, ge ett bevis för satsen samt illustrera satsen med ett lämpligt exempel.

Satsen skall kunna tillämpas av en person som kan beräkna ranger av matriser och ditt exempel skall visa hur satsen därvidlag används.

Lösning. Vi tror på följande

Sats. *Dimensionen hos det minsta delrum L till R^m som innehåller nollrummen till matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, båda med m stycken kolonner, är*

$$\dim(L) = m - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) - \operatorname{rank}(\mathbf{B}) + \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{pmatrix}\right)$$

där $\operatorname{rank}(X)$ *betecknar rangen hos matrisen* X.

Bevis. Nollrummet L_A resp L_B till matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ har, enligt linjära algebrans fundamentalsats, dimensionerna

$$d = \dim(L_A) = m - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) \qquad \text{resp} \qquad d' = \dim(L_B) = m - \operatorname{rank}(\mathbf{B}).$$

De vektorer som tillhör både L_a och L_B är nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

och bildar då ett delrum $L_A \cap L_B$ av dimension

$$d'' = \dim(L_A \cap L_B) = m - \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \end{pmatrix}\right)$$

Låt nu $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_{d''}$ vara en bas för $L_A \cap L_B$, som vi utvidgar med $\bar{f}_{d''+1}$, ..., $\bar{f}_d$ och $\bar{g}_{d''+1}$, ..., $\bar{g}_{d'}$ till baser för L_A resp L_B. Dessa vektorer $d + d' - d''$ stycken vektorer spänner upp L och är linjärt oberoende ty, om de vore linjärt beroende skulle

$$\bar{u} = \lambda_{d''+1}\bar{f}_{d''+1} + \ldots + \lambda_d \bar{f}_d = \mu_1 \bar{e}_1 + \ldots + \mu_{d'} \bar{g}_{d'}.$$

Vektorn till vänster ovan tillhör L_A och den till höger om likhetstecknet L_B. Alltså tillhör vektorn till vänster snittet av L_A och L_B och dr̈med måste

$$\lambda_{d''+1}\bar{f}_{d''+1} + \ldots + \lambda_d \bar{f}_d = \bar{u} = \mu'_1 \bar{e}_1 + \ldots + \mu'_{d''} \bar{e}_{d''}$$

för några tal μ'_1, ..., $\mu'_{d''}$, vilket är orimligt såvida inte $\lambda_{d''+1} = \ldots = \lambda_d = 0$ eftersom $\bar{f}$-vektorerna tillsammans med $\bar{e}$-vektorerna är linjärt oberoende.

Dimensionen hos L är alltså

$$\dim(L) = d + d' - d''$$

varur satsen följer.

(**Anm.** Det leder inte till poängavdrag om man utan bevis hänvisar till att som välkänt faktum gäller att $\dim(L) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$ om L är det minsta delrum som innehåller både L_1 och L_2.)

Nu till ett exempel.

Exempel.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi finner att

$$\text{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2, \qquad \text{rank}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) = 2$$

och

$$\text{rank}(\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)) = 3$$

Så det minsta delrum L som innehåller nollrummen till de bägge matriserna har dimension $\dim(L) = 4 - 2 - 2 + 3 = 3$. Ja faktiskt, med beteckningar från beviset ovan,

$$L = \text{span}\{\bar{e}_1 = (0,0,0,1), \bar{f}_2 = (0,0,1,0), \bar{g}_2 = (1,-1,0,0)\}$$

8. Låt V vara ett vektorrum. För en linjär avbildning A från V till sig själv, det vill säga, $A : V \to V$, låter vi A^n beteckna $A \circ A \circ \cdots \circ A$ (n stycken A:n), samt låter $d_n(A)$ beteckna dimensionen av bildrummet (”the range”) till A^n.

   (a) (2p) Bestäm en linjär avbildning $A : R^3 \to R^3$ sådan att $d_1(A) = 2$, och både A^2:s och A^3:s bildrum (”range”) är $\text{span}\{(1,2,3)\}$.

   Lösning. Vi definierar avbildningen A t ex genom

   $$A(1,0,0) = (0,1,0), \quad A(0,1,0) = (1,2,3), \quad A(1,2,3) = (1,2,3)$$

   Då gäller att A:s bildrum spänns upp av vekorerna $(0,1,0)$ och $(1,2,3)$ och därmed är $d_1(A) = 2$. Vidare ser vi att

   $$A^2(1,0,0) = A(0,1,0) = (1,2,3),$$

   $$A^2(0,1,0) = A(1,2,3) = (1,2,3),$$
   $$A^2(1,2,3) = A(1,2,3) = (1,2,3)$$

   så A^2:s bildrum spänns upp av $(1,2,3)$. Likaledes

   $$A^3(1,0,0) = A(1,2,3) = (1,2,3), A^3(0,1,0) = (1,2,3), A^3(1,2,3) = (1,2,3),$$

   så även A^3:s bildrum är $\text{span}\{(1,2,3)\}$

(b) (3p) Låt nu V vara ett vektorrum, vilket som helst. Om $A : V \to V$ vad kan då sägas allmänt om den oändliga sekvensen

$$d_1(A),\ d_2(A),\ d_3(A),\ \ldots\,?$$

(Antalet poäng sätts utifrån hur fullständigt ditt svar och din motivering är.)

Lösning. Låt V_n beteckna A^n:s bildrum, så $d_n(A) = \dim(V_n)$. Den linjära avbildningen A avbildar då V_n "surjektivt" på V_{n+1}, vilket vi skriver

$$A(V_n) = V_{n+1},$$

så vi har speciellt också att $A : V_n \to V_{n+1}$. Vi ser då också, eftersom alla vektorer i $A(V)$ tillhör V, ($A(V) \subseteq V$), att

$$V_{n+1} = A^{n+1}(V) = A^n(A(V)) \subseteq A^n(V) = V_n, \tag{1}$$

så, för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$d_{n+1} \leq d_n.$$

Kärnan vid avbildningen $A : V_n \to V_{n+1}$ utgöres av de vektorer i V_n som A avbildar på nollvektorn, vilket är

$$\ker(A) \cap V_n.$$

Enligt fundamentalsatsen gäller då att

$$\dim(\ker(A) \cap V_n) = \dim(V_n) - \dim(V_{n+1}) = d_n - d_{n+1} = \Delta_n. \tag{2}$$

Vidare, från ekvation (1) har vi att

$$\ker(A) \cap V_{n+1} \subseteq \ker(A) \cap V_n,$$

så

$$\dim(\ker(A) \cap V_{n+1}) \leq \dim(\ker(A) \cap V_n)$$

Med beteckningar definierade i ekvation (2) har vi därmed också att, för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Delta_n \geq \Delta_{n+1}.$$

Vi kan alltså sluta oss till att talen d_n bildar en avtagande följd och att differensen $\Delta_n = d_n - d_{n+1}$, mellan två på varandra följande tal i talföljden, också är en avtagande följd:

$$\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \cdots.$$

Men är varje sådan följd uppnåbar för någon linjär avbildning A? Vi visar nu att så är fallet.

Låt V_n, för $n = 1, 2, 3, ...$, vara en följd delrum sådan att

$$V_{n+1} \subseteq V_n, \qquad V_N = V_{N+1}$$

och för övrigt uppfyllande alla krav ovan på talföljde d_n. Vi skapar nu en bas för V_N som vi utvidgar, med hjälp av vektorerna $\bar{e}_i^{N-1}$, för $i = 1, 2, \ldots, \Delta_{N-1}$, till en bas för V_{N-1} som vi i sin tur utvidgar, med hjälp av vektorerna $\bar{e}_i^{N-2}$, $i = 1, 2, \ldots, \Delta_{N-2}$, till en bas för V_{N-2} etc. Avbildningen A definieras nu genom att A är identiteten på V_N, samt annars

$$A(\bar{e}_i^n) = \bar{e}_i^{n+1}$$

för $i = 1, 2, \ldots, \Delta_{n+1}$ och $A(\bar{e}_i^n) = \bar{0}$ för $i = \Delta_{n+1} + 1, \ldots, \Delta_n$. Då gäller

$$A(V_{N-1}) = V_N, \quad A(V_{N-2}) = V_{N-1}, \quad \ldots$$

och vi är klara.