Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på inre produktrum inför lappskrivning nummer 4 på kursen Linjär algebra för D, SF1604 , vt 13.

1. Lös i minstakvadratmening följande system

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Lösning: Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ges minstakvadratlösningen av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A^TA)^{-1}A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Betrakta R^4 med den inre produkten

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Bestäm en ortogonalbas till $L = span\{(1, 1, 2, 1), (2, 1, -1, -2), (1, 1, 1, 1)\}$ samt utvidga denna bas till en ortogonalbas för hela R^4. Använd sedan den ortogonalbas du fann för L för attt bestämma ortogonala projektionen av vektorn $(1, 2, 1, 1)$ på L.

Lösning: Låt $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$ och $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$. Då gäller att $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$. Sätt $\bar{f}_3 = (1, 1, 2, 1)$ och låt

$$\bar{e}_3 = \bar{f}_3 - proj_{span\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}}(\bar{f}_3).$$

Då

$$proj_{span\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}}(\bar{f}_3) = \frac{<\bar{f}_3|\bar{e}_1>}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 + \frac{<\bar{f}_3|\bar{e}_2>}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 = \frac{-1}{10}(2, 1, -1, -2) + \frac{5}{4}(1, 1, 1, 1) =$$

$$\frac{1}{20}(21, 23, 27, 29),$$

så får vi att

$$\bar{e}_3 = (1, 1, 2, 1) - \frac{1}{20}(21, 23, 27, 29) = \frac{1}{20}(-1, -3, 13, -9).$$

Vi hyfsar den sista vektorn genom att förlänga den med 20.

Delsvar: En ortogonal bas för L ges av vektorerna $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{e}_3 = (-1, -3, 13, -9)$.

Vi projicerar nu vektorn $\bar{u} = (1, 2, 1, 1)$ på L och använder därvid projektionslemmat.

$$\begin{aligned} proj_L(\bar{u}) = \quad & \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_1>}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 + \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_2>}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 + \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_3>}{\|\bar{e}_3\|^2}\bar{e}_3 = \\ & \tfrac{1}{10}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{5}{4}(1, 1, 1, 1) + \tfrac{-3}{260}(-1, -3, 13, -9) = \\ & \tfrac{26}{260}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{325}{260}(1, 1, 1, 1) + \tfrac{-3}{260}(-1, -3, 13, -9) = \\ & \tfrac{1}{260}(380, 360, 260, 300) = \tfrac{1}{13}(19, 18, 13, 15). \end{aligned}$$

För att komplettera med en fjärde vektor till en ortogonalbas för R^4 väljer vi

$$\bar{e}_4 = \bar{u} - proj_L(\bar{u}) = (1, 2, 1, 1) - \frac{1}{13}(19, 18, 13, 15) = \frac{1}{13}(-6, 8, 0, -2).$$

Vi hyfsar denna vektor genom att multiplicera med 13.

Svar: En ortogonal bas för R^4 med givna egenskaper ges av vektorerna $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{e}_3 = (-1, -3, 13, -9)$ och $\bar{e}_4 = (-6, 8, 0, -2)$.

3. Betrakta R^4. Bestäm (ortogonala) projektionen av vektorn $(1, 2, 2, 3)$ på delrummet

$$span\{(1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)\}$$

till R^4. (Standardskalärprodukt.)

Lösning: Låt A vara som i uppgift nummer 1. Den ortogonala projektionen ges då av

$$A(A^TA)^{-1}A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 39 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{19}(26, 39, 39, 52)$.

Kontroll: Vektorn $(1, 2, 2, 3) - \frac{1}{19}(26, 39, 39, 52) = \frac{1}{19}(-7, -1, -1, 5)$ skall vara vinkelrät mot $(1, 2, 1, 2)$ och $(1, 1, 2, 2)$, vilket den ju är.

4. Betrakta R^3. Vektorerna $\bar{u} = (1, 2, 1)$, $\bar{v} = (1, 1, 1)$ och $\bar{w} = (2, 1, 0)$ har i en bas $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ koordinaterna $\bar{u} = (1, 1, 1)_f$, $\bar{v} = (1, 0, 1)_f$ och $\bar{w} = (0, 1, 1)_f$. Bestäm basvektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$.

Lösning: Låt $\mathbf{T}$ beteckna transitionsmatrisen för byte från standardbassytemet till bassystemet $\mathbf{f}$. Då gäller att

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som vi kan sammanfatta i matrislikheten

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De sökta basvektorerna är kolonner i transitionsmatrisen $\mathbf{S}$ för basbyte från bassystemet $\mathbf{f}$ till standardbassytemet. Då $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1}$ får vi då

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

genom att använda att generellt gäller $(\mathbf{AB^{-1}})^{-1} = \mathbf{BA}^{-1}$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\bar{f}_1 = (-1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (0, 1, 0)$ och $\bar{f}_3 = (2, 0, 0)$.

---

5. Undersök om det finns tal a, b och c så att nedanstående matris blir en ortogonalmatris:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & a & a \\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} & b \\ -1/\sqrt{42} & c & -4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Lösning: Låt

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & a & a \\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} & b \\ -1/\sqrt{42} & c & -4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Raderna respektive kolonnerna bildar ON-baser för R^3. Vi använder först att raderna har längd 1. Detta ger

$$1 = \| \text{ rad } 1 \|^2 = \frac{1}{3} + a^2 + a^2.$$

$$1 = \| \text{ rad } 2 \|^2 = \frac{9}{14} + \frac{1}{14} + b^2.$$

$$1 = \| \text{ rad } 3 \|^2 = \frac{1}{42} + c^2 + \frac{16}{42}.$$

Dessa ekvationer ger att a antingen är $1/\sqrt{3}$ eller $-1/\sqrt{3}$, b antingen $2/\sqrt{14}$ eller $-2/\sqrt{14}$ samt c antingen $5/\sqrt{42}$ eller $-5/\sqrt{42}$.

Vi prövar oss nu fram:

Fall 1: $a = -1/\sqrt{3}$. Då ger villkoret att rad 1 är ortogonal mot rad 2 att

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{14}}.$$

Detta ger $b' = 4$ vilket ju strider mot att b antingen är $2/\sqrt{14}$ eller $-2/\sqrt{14}$. Detta fall är således uteslutet.

Fall 2: $a = 1/\sqrt{3}$. Då rad 1 ortogonal mot både rad 2 och rad 3 måste

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{14}},$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c'}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-4}{\sqrt{42}},$$

som ger $b' = -2$ och $c' = 5$.

Med $a = 1/\sqrt{3}$, $b = -2\sqrt{14}$ och $c = 5\sqrt{42}$ kommer raderna i matrisen ha längd 1 och rad 1 vara ortogonal mot rad 2 och rad 3. Man ser också att med dessa värden på b och c så blir även rad 3 och rad 2 ortogonala. Raderna bildar alltså en ON-bas. Matrisen är en ortogonal matris Q^T eftersom det då gäller att $Q^T Q = I$.

6. Bestäm ortogonala komplementet till lösningsrummet till följande system:

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Lösning: Lösningsrummet består av de (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 1, -1, 1) \quad \text{och} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 2, 1, -7).$$

Vektorerna $(1, 1, -1, 1)$ och $(1, 2, 1, -7)$ är då ortogonala mot all vektorer i lösningsrummet. Dessa vektorer spänner alltså upp ortogonala komplementet till lösningsrummet.

Svar: $span\{(1, 1, -1, 1), (1, 2, 1, -7)\}$.

7. Betrakar R^3. Visa att produktbildningen

$$< (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 7x_3y_3$$

inte är någon inre produkt på R^3.

Lösning: Vi fann att $< (1, -1, 0) \mid (1, -1, 0) >= 0$ vilket strider mot att $< \bar{u} \mid \bar{u} >\geq 0$ för alla vektorer $\bar{u}$ och med likhet precis då $\bar{u} = \bar{0}$.

8. Låt P_2 vara rummet av polynom av grad högst två och med den inre produkten

$$< p(t), q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Bestäm en ortogonal bas i P_2.

Lösning: Låt $p_1(t) = 1$ och sök ett polynom av grad 1 som är ortogonalt mot $p_1(t)$. Ansats $p_2(t) = t - a$ och vi skall bestämma a så att

$$0 =< 1, t - a >= \int_0^1 1 \cdot (t - a)dt = [\frac{t^2}{2} - at]_0^1 = \frac{1}{2} - a.$$

Så vi låter

$$a = \frac{1}{2}.$$

Ett tredje polynom till ortogonalbasen får vi om vi låter

$$p_3(t) = t^2 - Proj_{span\{1, t-\frac{1}{2}\}}(t^2) = t^2 - \frac{< 1, t^2 >}{< 1, 1 >}1 - \frac{< t - \frac{1}{2}, t^2 >}{< t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} >}(t - \frac{1}{2}).$$

Fyra inre produkter att beräkna:

$$< 1, 1 >= \int_0^1 1 \cdot 1dt = 1.$$

$$< 1, t^2 >= \int_0^1 1 \cdot t^2dt = \frac{1}{3}.$$

$$< t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} >= \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \cdot (t - \frac{1}{2})dt = [\frac{(t - \frac{1}{2})^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$< t - \frac{1}{2}, t^2 >= \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \cdot t^2dt = \int_0^1 t^3 - \frac{t^2}{2}dt = [\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{6}]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Insättning i uttrycket för $p_3(t)$ ger nu polynomet

$$p_3(t) = t^2 - \frac{1}{3} - (t - \frac{1}{2}) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Svar: Till exempel $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t - \frac{1}{2}$ och $p_3(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$.