Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar inför lappskrivning nummer 5 på kursen linjär algebra II för D, SF1604, vt 13.

1. För en linjär avbildning $A : R^3 \to R^3$ gäller att $A(1,0,0) = (1,2,1)$, $A(0,1,0) = (2,-1,2)$ och $A(0,0,1) = (1,1,1)$.

   (a) Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen.

   Lösning: Kolonnerna i avbildningens matris ges av bilden av basvektorerna. Alltså blir avbildningens matris

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bestäm $A(2,1,0)$.

   Lösning: $A(2,1,0) = A(2(1,0,0) + (0,1,0)) = 2A(1,0,0) + A(0,1,0) = (2,4,2) + (2,-1,2) = (4,3,4)$.

   (c) Bestäm A:s nollrum, med andra ord avbildningens kärna.

   Lösning: Nollrummet ges av de $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i R^3 sådana att $A\bar{x} = \bar{0}$ eller ekvivalent

   $$\mathbf{A}\bar{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Detta ger ett homogent linjärt ekvationssystem, som kan lösas t ex med Gauss elimination. Efter lite räknande med elementära radoperationer får vi till slut lösningsmängden

   $$(x_1, x_2, x_3) = t(3, 1, -5) \quad t \text{ reellt tal.}$$

   Alltså nollrummet är $span\{(3,1,-5)\}$.

   (d) Bestäm A:s bildrum.

   Lösning: Vi vet att A:s bildrummet är lika med matrisen $\mathbf{A}$:s kolonnrum. Då dimensionen av nollrummet plus dimensionen av kolonnrummet till en matris är lika med antalet kolonner så får vi att dimensionen av kolonnrummet är 2. Då kolonn 1 och kolonn 2 i det 2-dimensionella kolonnrummet är linjärt oberoende så bildar de en bas för detta rum. Således är A:s bildrum lika med $span\{(1,2,1),(2,-1,2)\}$.

   (e) Givet basen $\bar{f}_1 = (1,1,1)$, $\bar{f}_2 = (1,1,-1)$ och $\bar{f}_3 = (1,-1,0)$. Bestäm avbildningens matris relativt denna bas.

   Lösning: Omvandling av koordinaterna för en vektor i **f**-systemet till koordinater för samma vektor i **e**-systemet ges av multiplikation med matrisen

   $$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

och omvandling från **e**-systemet till **f**-systemet ges av multiplikation med inversen till denna matris dvs

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu avbildningens matris i bassystemet **f** genom

$$\mathbf{SAT} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Låt A beteckna den linjära avbildning från R^3 till R^3 som består av först en spegling i planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och därefter en projektion på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

   (a) Bestäm matrisen för denna linjära avbildning relativt standardbasen.

   Lösning: Låt S beteckna speglingen och P projektionen och låt **S** respektive **P** beteckna dessa linjära avbildningars matriser relativt standardbasen. Den sökta matrisen blir då matrisen **PS**. Vi söker nu matrisen **S**.

   En normalvektor till spegeln är t ex $\bar{n} = (1, 1, -2)$ och två vektorer spegeln är t ex $\bar{u} = (1, -1, 0)$ och $\bar{v} = (2, 0, 1)$. Vid spegling gäller $S\bar{n} = -\bar{n}$ 0och $S\bar{u} = \bar{u}$ och $S\bar{v} = \bar{v}$. Martins metod ger

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

   Matrisen **S** blir alltså

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

   Projektionsplanets normal är $\bar{n} = (2, 1, 2)$ och två vektorer paralella med planet är t ex $\bar{u} = (1, 0, -1)$ och $\bar{v} = (1, -2, 0)$. Det gäller att $P\bar{n} = \bar{0}$ och $P\bar{u} = \bar{u}$ och $P\bar{v} = \bar{v}$. Martins metod ger då matrisen **P**

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 5 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & -1 & 4/9 & 2/9 & -5/9 \\ 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -4/9 & -2/9 & 5/9 \end{array}\right)$$

Svar:

$$\mathbf{PS} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -17 & 10 \\ -16 & 14 & 14 \\ 4 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

(b) Bestäm avbildningens bildrum och nollrum.

Lösning: Nollrummet får man genom att lösa homogena ekvationssytemet $\mathbf{PS}\bar{x}^T = \bar{0}^T$ med Gausselimination, så efter lite räkningar finner man att nollrummet är $span\{(7,4,4)\}$ Bildrummet blir det plan på vilket vektorerna projiceras, dvs $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Om den linjära avbildningen A vet man att $A(1,2,-1) = (2,2,1)$, $A(0,1,3) = (2,1,1)$ och $A(1,1,1) = (1,1,0)$. Bestäm den inversa avbildningens matris relativt standardbasen.

Lösning: Vi använder Martins metod

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_1 & - \\ - & \bar{f}_2 & - & - & A\bar{f}_2 & - \\ - & \bar{f}_3 & - & - & A\bar{f}_3 & - \end{array}\right) \sim \text{elem. radop} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & A^{-1}\bar{e}_1 & - & - & \bar{e}_1 & - \\ - & A^{-1}\bar{e}_2 & - & - & \bar{e}_2 & - \\ - & A^{-1}\bar{e}_3 & - & - & \bar{e}_3 & - \end{array}\right)$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Svar: Inversa avbildningens matris relativt standardbasen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Visa att avbildningen A från R^3 till R^3 definierad genom

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, 1 + x_3 + x_1) \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3$$

inte är linjär.

Lösning: För varje linjär avbildning gäller att $A\bar{0} = \bar{0}$. För den givna avbildningen har vi $A(0,0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$ och alltså kan den inte vara linjär.

---

5. Låt $\mathcal{P}_3$ beteckna det vektorrum som består av polynom av grad högst tre. Derivering är en linjär avbildning D på detta rum. Bestäm avbildningen D's matris relativt basen 1, t, t^2 och t^3.

Lösning: Vi finner att

$$D1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3.$$

$$Dt = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3.$$

$$Dt^2 = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3.$$

$$Dt^3 = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3.$$

Så matrisen blir

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Låt $\bar{v}_0$ vara en fix vektor i vanliga tredimensionella rummet och definiera en avbildning genom att

$$A\bar{u} = \bar{v}_0 \times \bar{u} \ .$$

Visa att avbildningen är linjär och bestäm avbildningens matris relativt standardbasen om $\bar{v}_0 = (1, 1, 1)$.

Lösning: Räknelagarna för vektorprodukt ger

$$A(\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}) = \bar{v}_0 \times (\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}) = \lambda(\bar{v}_0 \times \bar{u}) + \mu(\bar{v}_0 \times \bar{v}) = \lambda A(\bar{u}) + \mu A(\bar{v}) \ .$$

Vi finner enligt formeln för beräkning av vektorprodukt

$$A(1, 0, 0) = (1, 1, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, -1) \ ,$$

$$A(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \times (0, 1, 0) = (-1, 0, 1) \ ,$$

och

$$A(0, 0, 1) = (1, 1, 1) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0) \ .$$

Så avbildningens matris relativt standardbasen blir alltså

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. (a) Konstruera en linjär avbildning A från R^4 till R^4 sådan att A:s bildrum har dimension 2 och $A \circ A$ avbildar alla vektorer på nollvektorn.

Lösning: Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ utgöra en bas för R^4 (vilken bas som helst, spelar ingen roll.) Definiera A genom

$$A\bar{e}_1 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_2 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_3 = \bar{e}_1, \quad A\bar{e}_4 = \bar{e}_2$$

och

$$A(\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4\bar{e}_4) = \lambda_1 A\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4 A\bar{e}_4.$$

Då blir A en linjär avbildning och

$$A \circ A(\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4\bar{e}_4) = A(\lambda_1 A\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4 A\bar{e}_4) = A(\lambda_3\bar{e}_1 + \lambda_4\bar{e}_2) = \lambda_3 A\bar{e}_1 + \lambda_4 A\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

(b) Visa att detta är omöjligt om A är en linjär avbildning från R^3 till R^3.

Lösning: Om $A \circ A = 0$ så gäller för varje $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ att

$$A(A\bar{x}^T) = \bar{0}.$$

Detta innebär att varje kolonn $A\bar{x}^T$ tillhör A:s nollrum. Men mängden av alla kolonner $A\bar{x}^T$ utgör bildrummet som har dimension 2, som alltså inte kan ligga i nollrummet eftersom detta har dimension 1.