Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på linjära ekvationssystem och matriskalkyl inför lappskrivning nummer 1, SF1604, vt13.

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 6 \end{array}\right.$$

LÖSNING:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 0 & -1 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right).$$

Vi läser ut ur tablån ovan att $z = -1$, $y = 2$ och $x = 1$.

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 8 \\ -x & + & 5y & + & z & = & 10 \\ x & - & 18y & + & z & = & -38 \end{array}\right.$$

LÖSNING: Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 13y & - & 2z & = & 28 \\ -x & + & 5y & + & z & = & 10 \\ & - & 13y & + & 2z & = & -28 \end{array}\right.$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0 \\ -x & + & 5y & + & z & = & 10 \\ & - & 13y & + & 2z & = & -28 \end{array}\right. .$$

Låter vi nu y vara ett godtyckligt tal $y = t$ så får vi för varje val av ett sådant tal t precis en lösning

$$z = \tfrac{1}{2}(-28 + 13t) = -14 + \tfrac{13}{2}t$$
$$x = -10 + 5y + z = -10 + 5t - 14 + \tfrac{13}{2}t = -24 + \tfrac{23}{2}t.$$

3. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en invers till matrisen $\mathbf{A}$ och använd denna invers för att bestämma en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

LÖSNING: Beräknar först inversen till matrisen A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matrisen till höger ovan är inversen men för säkerhets skull gör vi en kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

precis som det skall vara. Multiplicerar vi nu den givna matrisekvationen med $\mathbf{A}^{-1}$ till vänster på bägge sidor om likhetstecknet får vi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{dvs} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Vi finner alltså

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Låt matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara som ovan. Beräkna

$$(\mathbf{AA})^{-1}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{A})^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1})^T, \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T \quad \text{och} \quad (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}.$$

LÖSNING:

a)

$$(\mathbf{AA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $(\mathbf{A}+\mathbf{A})^{-1} = (2\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$, ty

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1} \cdot 2A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}\,.$$

c)

$$(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}^{-1})^T = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

.

d)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix})^T = (\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix})^T = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -26 & 45 \end{pmatrix}$$

e)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix})^{-1} = (\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix})^{-1} =$$
$$\frac{1}{5\cdot 45 + (-26)\cdot(-19)}\begin{pmatrix} 45 & 26 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$$

---

5. För vilka värden på talen a och b saknar systemet

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 4z & +u = & 8 \\ -x & + & 5y & + & z & +2u = & 10 \\ x & - & 18y & + & z & +au = & b \end{cases}$$

lösning.

LÖSNING: Andra ekvationen adderad en gång till den tredje ekvationen och två gånger till den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} & & 13y & - & 2z & + & 5u & = & 28 \\ -x & + & 5y & + & z & + & 2u & = & 10 \\ & - & 13y & + & 2z & + & (a+2)u & = & b+10 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} & & & & & & (a+7)u & = & b+38 \\ -x & + & 5y & + & z & + & 2u & = & 10 \\ & - & 13y & + & 2z & + & (a+2)u & = & b+10 \end{cases}.$$

Om $a = -7$ och $b \neq -38$ så saknar systemet uppenbarligen lösning.

6. Bestäm samtliga värden på det reella talet a för vilka det homogena systemet nedan har icketriviala lösningar.

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & a^2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & az & = & 0 \end{cases}$$

LÖSNING:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1-(a-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

När $a \neq 1$ finns det bara den triviala lösningen. I övriga fall finns det icketriviala lösningar.

7. Du får reda på att ett linjärt ekvationssystem i de obekanta x, y och z bl a har de bägge lösningarna $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ och $(x, y, z) = (2, 1, 3)$. Vilken information ger detta om samtliga lösningar till systemet.

   Lösning: Om $\mathbf{c}$ och $\mathbf{c}'$ är lösningar till systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dvs

   $$\mathbf{Ac} = \mathbf{b} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{Ac}' = \mathbf{b}$$

   så gäller att för varje reellt tal t att

   $$\mathbf{A}(\mathbf{c} + t(\mathbf{c} - \mathbf{c}')) = \mathbf{Ac} + t(\mathbf{Ac} - \mathbf{Ac}') = \mathbf{b} + \mathbf{t}(\mathbf{b} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} + \mathbf{t0} = \mathbf{b}.$$

   Detta innebär att tripplarna

   $$\mathbf{c} + t(\mathbf{c} - \mathbf{c}'),$$

   för varje reellt tal t, är lösningar till systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

   Med givna indata får vi nu att lösningsmängden innehåller tripplarna

   $$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t((1, 2, 1) - (2, 1, 3)),$$

   dvs

   $$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-1, 1, -2)$$

   där t är ett godtyckligt reellt tal.

   Men systemet kan innehålla fler lösningar. T ex skulle det givna ekvationssystemet kunna vara

   $$0x + 0y + 0z = 0,$$

   (vilket uppfyller alla formella krav på att vara ett linjärt ekvationssystem) och vars lösningsmängd består av alla taltripplar.

   SVAR: Den enda information vi får ut av indata är att lösningsmängden innehåller de oändligt många lösningarna

   $$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-1, 1, -2)$$

   där t kan vara vilket reellt tal som helst, men att detta inte behöver utgöra samtliga lösningar.

8. Finns det någon matris $\mathbf{X}$ sådan att

   $$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Lösning: Matrismultiplikation ger att kolonn ett multipliceras till kolonn ett, etc, så

   $$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Men då gäller att

   $$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

   vilket strider mot förutsättningen att

   $$\mathbf{X}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OBS 1. Andra uppgiften på lappskrivningen kan eventuellt bli svårare än de fyra ovan.
OBS 2. Lösningar anslås på kurshemsidan senast helgen innan lappskrivningen.