Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE och CMETE, SF1610 och 5B1118, måndagen den 7 januari 2013, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 36p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

För godkänt resultat krävs också minst 12p på del I. Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Bestäm den minsta postiva resten vid division av 2^{944} med 157.

2. (3p) Tolv röda och elva gröna, men för övrigt identiska, bollar skall läggas i påsar som barnen A, B, C och D skall få. Hur många möjliga fördelningar av bollarna finns om varje påse skall innehålla minst en boll av varje färg. Svara med ett heltal.

3. (3p) Betrakta gruppen $G = (Z_3, +) \times (Z_3, +) \times (Z_3, +)$ som består av alla 3-tipplar (x_1, x_2, x_3), där $x_1, x_2, x_3 \in (Z_3, +)$ och där operationen är definierad genom komponentvis addition modulo 3, dvs
$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = ((x_1 + y_1)(\text{mod } 3), (x_2 + y_2)(\text{mod } 3), (x_3 + y_3)(\text{mod } 3)).$$
   (a) (1p) Bestäm ordningen av elementet $(1, 2, 0)$.
   (b) (1p) Bestäm en icketrivial delgrupp till G.
   (c) (1p) Hur många icketriviala delgrupper har G? (Ett korrekt svar utan motivering ger full poäng.)

4. (3p) Bestäm kontrollmatrisen till en 1-fels-rättande kod C med $|C| = 32$ stycken ord av längd 9. När du gjort detta får du 1 poäng. Du får ytterligare 2 poäng om C är sådan att ordet 111111111 inte finns med i koden C men går att rätta till ett ord i C.

5. (3p) Grafen G saknar multipla kanter och loopar (öglor), antalet noder med valens (grad) tre är fler än antalet noder med valens ett. Kan grafen G sakna cykler? (Ett svar utan motivering ger inga poäng.)

DEL II

6. (4p) I en skola med fyra klasser med respektive 13, 14, 15 och 16 elever skall ett elevеråd utses om 12 elever och med minst en elev från varje klass. På hur många olika sätt kan detta ske? Svaret får innehålla uttryck som presenterats i kursen.

7. (3p) Betrakta gruppen $\mathcal{S}_{12}$ av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, \ldots, 12\}$. Undersök om det finns permutationer φ, γ och ψ i $\mathcal{S}_{12}$ sådana att
$$\varphi^4 = \gamma^5 = \psi^6 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12).$$

8. (a) (2p) Bestäm Booleska funktioner $f \neq 1$ och $g \neq 1$ sådana att ekvationen $f + x = g$ har precis fyra olika lösningar i en Boolesk algebra som du väljer själv.
   (b) (2p) Kan en sådan ekvation, som den i föregående uppgift, ha precis fem olika lösningar? Motivera ditt svar.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{A}$ vara ett alfabete med oändligt många men ett uppräkneligt antal bokstäver.
   (a) (2p) Visa att mängden av ord av längd två som man kan bilda med hjälp av bokstäver från alfabetet $\mathcal{A}$ är en uppräkneligt oändlig mängd.
   (b) (3p) Är också mängden av alla ord av ändlig längd, som man kan bilda med hjälp av bokstäver i $\mathcal{A}$, en uppräkneligt oändlig mängd?

10. (5p) I den bipartita grafen G med nodmängderna X och Y (så det finns inga kanter mellan noder i X och inga kanter mellan noder i Y) gäller att mängderna X och Y är ändliga och lika stora. Låt för varje delmängd A till X
$$R(A) = \{y \in Y \mid y \text{ granne till minst en nod i } A\}$$
och för varje delmängd B till Y
$$L(B) = \{x \in X \mid x \text{ granne till minst en nod i } B\}.$$
Visa att det finns en delmängd A till X med $|R(A)| < |A|$ om och endast om det finns minst en delmängd B till Y sådan att $|L(B)| < |B|$.