Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning i Diskret Matematik för CINTE och CMETE, SF1610 och 5B1118, torsdagen den 18 oktober 2012, kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 37p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
18	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
22	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
28	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
32	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

För godkänt resultat krävs också minst 12p på del I. Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

Var och en av nedanstående uppgifter svarar mot en kontrollskrivning. Godkänt resultat på en kontrollskrivning ger automatiskt full poäng på motsvarande uppgift. Att lösa en uppgift som man på detta sätt redan har till godo ger inga extra poäng.

1. (3p) Lös ekvationen $35x + 17 = 15$ i ringen Z_{71}.

2. (3p) Hur många olika ord av längd 9 kan man bilda med hjälp av bokstäverna A, A, A, B, B, C, C, C, dvs med hjälp av tre stycken A:n, tre stycken B:n och tre stycken C:n. För full poäng krävs att svaret ges i formen av ett heltal.

3. (3p) Betrakta gruppen $G = (Z_{15}, +)$. Bestäm ordningen av elementen 10, 11 och 12.

4. Nedanstående matris $\mathbf{H}$ är kontrollmatrisen till en 1-felsrättande kod C.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) (1p) Bestäm två ord som tillhör koden C.

   (b) (1p) Bestäm antalet ord som finns i koden C.

   (c) (1p) Undersök om ordet 0001110100 går att rätta. Rätta ordet om det går att rätta. Om du finner att ordet inte kan rättas skall du motivera varför så är fallet.

5. (3p) Kan det finnas någon planär sammanhängande graf med 38 kanter och 24 noder om alla grafens cykler har längd minst 5? (Ett svar utan motivering ger inga poäng.)

DEL II

6. (3p) En oändlig talföljd $a_0 = 5$, $a_1 = 2$, a_3, a_4, ... , definieras rekursivt genom

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$$

för $n = 2, 3, \ldots$. Visa med ett induktionsbevis att $a_n = 3(-2)^n + 2 \cdot 4^n$ för alla naturliga tal n.

7. Låt $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, 6\}$ och låt

$$\mathcal{S} = \{(1, 2), (3, 3), (3, 4), (6, 5), (5, 6)\}.$$

   (a) (2p) Bestäm en ekvivalensrelation på $\mathcal{M}$ som innehåller $\mathcal{S}$.

   (b) (1p) Beskriv två andra ekvivalensrelationer på $\mathcal{M}$ som innehåller $\mathcal{S}$

   (c) (1p) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på $\mathcal{M}$ innehåller $\mathcal{S}$.

8. (4p) Fem flickor och fem pojkar skall delas in i tre grupper på ett sådant sätt att varje grupp innehåller minst en pojke och minst en flicka. På hur många olika sätt kan detta ske? För full poäng krävs att svaret ges i formen av ett heltal.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

9. Låt $\mathcal{S}_n$, för varje naturligt tal n, beteckna den grupp som består av alla permutationer av de element i mängden $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

   (a) (2p) Bestäm den minsta delgrupp $\mathcal{T}_3$ till $\mathcal{S}_4$ som innehåller elementen τ_2 och τ_3, vilka i cykelnotation beskrivs $\tau_2 = (1\ 2)$ och $\tau_3 = (1\ 3)$.

   (b) (2p) Bestäm samtliga delgrupper H till $\mathcal{S}_4$ sådana att $\mathcal{T}_3 \subseteq H \subseteq \mathcal{S}_4$.

   (c) (2p) Går ditt resultat i uppgift (b) ovan att generalisera till fallet $\mathcal{S}_n$ och $\mathcal{T}_{n-1}$, och hur skulle i så fall en sådan generalisering se ut?
   (Inga stringenta bevis krävs i svaret på denna deluppgift, men hur många poäng du får beror på hur du resonerar i ditt svar.)

10. Betrakta följande två Booleska funktioner f och g i de fyra variablerna x, y, z och w:

$$f(x, y, z, w) = xy + \bar{z}(xw + y), \qquad g(x, y, z, w) = xyw + z(w + \bar{y}).$$

   (a) (1p) Bestäm två Booleska funktioner $h \neq 0$ och k sådana att

$$fh + k = g.$$

   där f och g är som ovan angivits. (Anm. $h = 0$ om $h(x, y, z, w)$ antar värdet 0 i samtliga punkter (x, y, z, w).)

   (b) (1p) Bestäm antalet par (h, k) av Booleska funktioner h och k som löser den givna ekvationen ovan.

   (c) (3p) Bestäm en generell formel för antalet par (h, k) av Booleska funktioner i de n variablerna $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som löser en allmän ekvation $fh + k = g$, där f och g är två givna Booleska funktioner i variablerna $x_1, x_2, \ldots, x_n$.