KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Lösningar till kontrollskrivning 2A, 18 september 2012, 08.45–09.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Om k, n och n' är hela tal sådana att $1 \leq k \leq n < n'$ så gäller alltid att $\binom{n}{k} < \binom{n'}{k}$	x	
b)	För det så kallade Stirlingtalet $\mathrm{S}(n,k)$ gäller att $\mathrm{S}(n,k) = \mathrm{S}(n-1,k-1) + k\mathrm{S}(n-1,k)$ om $2 \leq k < n$.	x	
c)	För alla hela tal k, med $0 < k < n$, så gäller att $(n+k)! \geq n! + k!$.		x
d)	Det finns positiva hela tal n_1, n_2 eller n_3 sådana att multinomialkoefficienten $\binom{n}{n_1,n_2,n_3}$ är lika med 1.		x
e)	Det finns naturliga tal n, m och k sådana att $\binom{n}{k} = m!$.	x	
f)	Primtalet p delar binomialkoefficienten $\binom{p}{k}$ för varje heltal k sådant att $1 \leq k \leq p-1$.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange antalet sätt att lägga 10 identiska bollar i tre olika och etiketterade lådor, låda 1, låda 2 och låda 3.

(Ett svar räcker och detta svar får innehålla beteckningar för kombinatoriska storheter som presenterats under kursens gång.)

SVAR: $\binom{10+3-1}{3-1} = 66$.

b) (1p) En klass med 15 flickor och 14 pojkar skall utse ett klassråd bestående av 3 pojkar och 3 flickor. Hur många olika klassråd kan man bilda?

(Ett svar räcker och detta svar får innehålla beteckningar för kombinatoriska storheter som presenterats under kursens gång.)

SVAR: $\binom{15}{3} \cdot \binom{14}{3}$.

c) (1p) Vilket heltal är lika med binomialkoefficienten $\binom{17}{14}$.

(Ett svar räcker.)

SVAR: $[\binom{17}{17-14} = \binom{17}{3} = \frac{17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3} = 17\cdot8\cdot5 = 17\cdot40 =]680$.

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Bestäm antalet ord av längd 7 som man kan bilda med hjälp av bokstäverna i ordet DELPROV och som inte innehåller något av delorden ROV, LED resp DEO.

(Till exempel så är ordet PROVDEL inte ett tillåtet ord, eftersom det innehåler delordet ROV, men ordet ELDVORP är tillåtet. Observera också att var och en av de sju bokstäverna D, E, L, P, R, O och V skall finnas med i varje ord.)

(Svaret, som skall motiveras, får innehålla beteckningar för kombinatoriska storheter som presenterats under kursens gång.)

Lösning: Totalt finns 7! olika ord men vissa ord är förbjudna. Mängden av ord som innehåller delordet ROV betecknar vi med A, mängden ord som innehåller delordet LED betecknar vi med B och mängden ord som innehåler delordet DEO betcknar vi med C.

Svaret ges då, med hjälp av principen om inklusion exklusion, av

$$7! - |A \cup B \cup C| =$$

$$= 7! - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

Vi beräknar storleken av de ovan angivna mängderna.

$|A|$ =?: Vi klistrar ihop R:et, O:et och V:et till en enda stor bokstavssammansättning ROV. Då återstår fyra bokstäver som kan kombineras ihop med ”superbokstaven” ROV. Totalt finns då 5! olika ord i A.

På samma sätt beräknas att $|B| = |C| = 5!$

Inget ord innehåller både delorden ROV och DEO ej heller både LED och DEO. Alltså

$$|A \cap C| = |B \cap C| = |A \cap B \cap C| = 0.$$

Men $|A \cap B| = 3!$ eftersom denna mängd av ord består av de tre ”bokstäverna” ROV, LED och P.

Vi får

SVAR: $7! - 3 \cdot 5! + 3!$.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Tio olikfärgade, men för övrigt identiska, bollar skall placeras i en rad. Hur många olika rader kan man då skapa om två av bollarna är gula, tre är röda, en boll är vit och fyra bollar är svarta.

(Svaret skall ges i formen av ett heltal.)

Lösning: Vi skall välja bland 10 positioner åt bollarna, två av de tio positionerna till de gula bollarna, etc. Problemet är ekvivalent med att dela in en mängd med 10 element i fyra etiketterade delmängder med vardera 2, 3, 1 resp 4 element. Multinomialkoefficienten

$$\binom{10}{2,3,1,4} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 6} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 200 \cdot 63 = 12600$$

ger då vårt

SVAR: 12600

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) En skolklass med sju pojkar och tio flickor skall delas in i två (oetiketterade) grupper på ett sådant sätt att varje grupp innehåller minst en pojke. På hur många olika sätt kan detta ske?

(Svaret får innehålla beteckningar för kombinatoriska storheter som presenterats under kursens gång.)

Lösning: Först delar vi in pojkarna i två icke-tomma delmängder vilket går på $\mathrm{S}(7,2)$ olika sätt. Varje flicka får nu två val, att välja den ena gruppen eller den andra gruppen. Totala antalet val för flickorna blir då 2^{10}.

Multilikationsprincien ger nu

SVAR: $\mathrm{S}(7,2)\cdot 2^{10}(=(2^6-1)2^{10}=2^{16}-2^{10})$.