KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Kontrollskrivning 3A, 26 september 2012, 10.45–11.45,
i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

	sant	**falskt**
a) Om G är en grupp med 17 element så gäller för varje element $g \in G$ att $g^{18} = g$.	x	
b) Varje grupp med 17 element är en cyklisk grupp.	x	
c) I varje grupp gäller kommutativa lagen dvs att $a \circ b = b \circ a$ för alla element a och b i gruppen.		x
d) Det finns minst en grupp som har precis tre olika delgrupper	x	
e) Det finns element vars ordning är 17 i gruppen $\mathcal{S}_8$, dvs mängden av permutationer av en mängd med 8 element		x
f) Mängden $\{\text{id.}, (1\ 2), (1\,3)\}$ utgör en delgrupp till gruppen $\mathcal{S}_3$ som består av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, 3\}$.		x

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange samtliga sidoklasser i gruppen $G = (Z_{18}, +)$ till den delgrupp H till G som består av elementen $\{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$.

SVAR:
Sidoklasserna är $\{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$, $\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$, $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$

b) (1p) Nedanstående ej kompletta multiplikationstabell kan kompletteras till en multiplikationstabell till en grupp med elementen $G = \{e, a, b, c, d, f\}$. Gör det!

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

c) (1p) Låt $\mathcal{S}_8$ beteckna samma grupp som i uppgift 1e. Låt γ vara den permutation som i cykelnotation skrivs $\gamma = (1\ 2\ 5)(3\ 7\ 8\ 6)$. Låt α vara permutationen $\alpha = \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \gamma^{-1}$. Skriv α i tablåform.

SVAR:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt φ och ψ nedan vara permutationer, skrivna i tablåform, av elementen i mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bestäm ordningen av permutationerna $\varphi \circ \psi$ och $\psi \circ \varphi$. Lösningen skall motiveras.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösning: Vi skriver permutationerna i fråga som en produkt av disjunkta cykler:

$$\varphi \circ \psi = (1\ 3\ 5\ 2)(4\ 6)$$

vars ordning är 4, resp

$$\psi \circ \varphi = (1\ 3\ 2\ 4)(6\ 5)$$

som också har ordning 4.

SVAR: Båda har ordning 4.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm samtliga cykliska delgrupper till gruppen $(Z_9, +)$. (Obs elementen i var och en av delgrupperna skall anges, det räcker alltså inte enbart att ange generatorerna för delgrupperna.) Lösningen skall motiveras.

Lösning:

$$< 0 >= \{0\},$$
$$< 1 >= \{1, 1+1=2, 1+1+1=3, \ldots, 8, 0\} = (Z_9, +)$$
$$< 3 >= \{3, 3+3=6, 3+3+3=0\}$$

Då $1 = 2+2+2+2+2$ så $1 \in < 2 >$ och alltså $(Z_9, +) =< 1 > \subseteq < 2 >$ och enda möjligheten är att $< 2 >= (Z_9, +)$.

etc. Vi hittar precis tre olika cykliska delgrupper

SVAR: $\{1, 1+1=2, 1+1+1=3, \ldots, 8, 0\}$, $\{3, 6, 0\}$ och $\{0\}$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm samtliga delgrupper H till gruppen $G = (Z_{24}, +)$ till vilka det finns en sidoklass $a + H$ som bl a innehåller elementen 3 och 7 (men som kan innehålla fler element). Lösningen skall motiveras.

Lösning: Elementet 0 tillhör H och 3 tillhör då sidoklassen $3 + H$. För att 7 skall tillhöra denna sidoklass måste elementet 4 också tillhöra H, och omvänt, alla delgrupper H som innehåller elementet 3 kommer att ha en sidoklass $3+H$ som innehåller både 3 och 7.

Slutsatsen blir att det är de delgrupper som innehåller delgruppen $< 4 >$ har den sökta egenskapen. Antag $< 3 > \subseteq H \subseteq G$. Eftersom $< 4 >= \{4, 8, 12, ..., 20, 0\}$ har 6 element och G har 24 element så skall 6 dela $|H|$ och $|H|$ dela 24. Enda möjliga sådana $|H|$ är 6, 12 resp 24, dvs $H =< 4 >$, $H =< 2 >$ eller $H = G$.

SVAR: $(Z_{24}, +)$, $< 2 >$ eller $< 4 >$.