KTH Matematik
Olof Heden

Σ p	G/U	bonus

Efternamn	förnamn	pnr	årskurs

Kontrollskrivning 3B, 26 september 2012, 10.45–11.45, i SF1610 Diskret matematik för CINTE och CMETE.

Inga hjälpmedel tillåtna.
Minst 8 poäng ger godkänt.
Godkänd ks n medför godkänd uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \ldots, 5$.
13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng till tentamen.
Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.
Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.
Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Om G är en grupp med 23 element så gäller för varje element $g \in G$ att $g^{23} = g$.		x
b)	I varje grupp gäller kommutativa lagen dvs att $a \circ b = b \circ a$ för alla element a och b i gruppen.		x
c)	Varje grupp med 23 element är en cyklisk grupp.	x	
d)	Mängden $\{\text{id.}, (1\ 2), (1\,3)\}$ utgör en delgrupp till gruppen $\mathcal{S}_3$ som består av alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, 3\}$.		x
e)	Det finns element vars ordning är 23 i gruppen $\mathcal{S}_8$, dvs mängden av permutationer av en mängd med 8 element		x
f)	Det finns minst en grupp som har precis tre olika delgrupper.	x	

poäng uppg.1

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange samtliga sidoklasser i gruppen $G = (Z_{15}, +)$ till den delgrupp H till G som består av elementen $\{0, 3, 6, 9, 12\}$.

SVAR: Sidoklasserna är $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, $\{1, 4, 7, 10, 13\}$ och $\{2, 5, 8, 11, 14\}$

b) (1p) Nedanstående ej kompletta multiplikationstabell kan kompletteras till en multiplikationstabell till en grupp med elementen $G = \{e, a, b, c, d, f\}$. Gör det!

SVAR:

$\circ$	e	a	b	c	f	d
e	e	a	b	c	f	d
a	a	e	d	f	c	b
b	b	f	e	d	a	c
c	c	d	f	e	b	a
f	f	b	c	a	d	e
d	d	c	a	b	e	f

c) (1p) Låt $\mathcal{S}_8$ beteckna samma grupp som i uppgift 1e. Låt γ vara den permutation som i cykelnotation skrivs $\gamma = (1\ 2\ 7)(3\ 6\ 8\ 5)$. Låt α vara permutationen $\alpha = \gamma^{-1} \circ \gamma \circ \gamma^{-1}$. Skriv α i tablåform.

SVAR:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 4 & 8 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Namn	poäng uppg.3

3) (3p) Låt φ och ψ nedan vara permutationer, skrivna i tablåform, av elementen i mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bestäm ordningen av permutationerna $\varphi \circ \psi$ och $\psi \circ \varphi$. Lösningen skall motiveras.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösning: Vi skriver permutationerna i fråga som en produkt av disjunkta cykler:

$$\varphi \circ \psi = (1\ 3\ 2\ 4\ 6)(5)$$

vars ordning är 5, resp

$$\psi \circ \varphi = (1\ 3\ 6\ 5\ 2)(4)$$

som också har ordning 5.

SVAR: Båda har ordning 5.

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Bestäm samtliga cykliska delgrupper till gruppen $(Z_8, +)$. (Obs elementen i var och en av delgrupperna skall anges, det räcker alltså inte enbart att ange generatorerna för delgrupperna.) Lösningen skall motiveras.

Lösning:

$$< 0 >= \{0\}.$$

$$< 1 >= \{1, 1+1=2, 1+1+1=3, \ldots, 7, 0\} = (Z_8, +)$$
$$< 2 >= \{2, 2+2=4, 2+2+2=6, 2+2+2+2=0\}$$

Då $1 = 3+3+3$ så $1 \in< 3 >$ och alltså $(Z_8, +) =< 1 >\subseteq< 3 >$ och enda möjligheten är att $< 3 >= (Z_8, +)$.

$$< 4 >= \{4, 4+4=0\}$$

etc. Vi hittar precis fyra olika cykliska delgrupper

SVAR: $\{0\}$, $\{1, 1+1=2, 1+1+1=3, \ldots, 7, 0\}$, $\{2, 4, 6, 0\}$ och $\{4, 0\}$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Bestäm samtliga delgrupper H till gruppen $G = (Z_{24}, +)$ till vilka det finns en sidoklass $a + H$ som bl a innehåller elementen 4 och 7 (men som kan innehålla fler element). Lösningen skall motiveras.

Lösning: Elementet 0 tillhör H och 4 tillhör då sidoklassen $4 + H$. För att 7 skall tillhöra denna sidoklass måste elementet 3 också tillhöra H, och omvänt, alla delgrupper H som innehåller elementet 3 kommer att ha en sidoklass $4+H$ som innehåller både 4 och 7.

Slutsatsen blir att det är de delgrupper som innehåller delgruppen $< 3 >$ har den sökta egenskapen. Antag $< 3 > \subseteq H \subseteq G$. Eftersom $< 3 >= \{3, 6, 9, ..., 21, 0\}$ har 8 element och G har 24 element så skall 8 dela $|H|$ och $|H|$ dela 24. Enda möjliga sådana $|H|$ är 8 resp 24, dvs $H =< 3 >$ eller $H = G$.

SVAR: $(Z_{24}, +)$ och sin delgrupp $< 3 >$.