Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till Uppgift 2, KS2 Komplex analys, SF1628, den 24 oktober 2009

2) (3p) Taylorutveckla funktionen $\mathrm{Log}(1+z)$ i punkten $z=i$. Här betecknar $\mathrm{Log}(z)$ principalgrenen av logaritmen. Vad blir konvergensradien?

Lösning. Vi får då $|\zeta - i| < \sqrt{2}$

$$\frac{1}{1+\zeta} = \frac{1}{1+i+(\zeta-i)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(\zeta-i)^k}{(1+i)^{k+1}}$$

Då z ligger i cirkelskivan $|z-i| < \sqrt{2}$ kan man integrera from i till z och pga likformig konvergens av potensserien kan man intergra termvis och då fås

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(1+z) - \mathrm{Log}(1+i) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-i)^{k+1}}{(k+1)(1+i)^{k+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-i)^n}{n(1+i)^n}\end{aligned}$$

Vi kan sedan skriva $\mathrm{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,2 + \frac{\pi i}{4}$ och detta ger svaret

$$\mathrm{Log}(1+z) = \mathrm{Log}\,2 + \frac{\pi i}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-i)^n}{n(1+i)^n}.$$

Man ser att konvergensradien blir $\sqrt{2}$.

En alternativ metod är att använda Taylors formel direct.