Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys, SF1628, den 10 januari 2013

1. Finn alla värden av uttrycket

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$$

Lösning. Vi får

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} &= \exp\{(1+i)(-i\frac{\pi}{4}+i2\pi n)\}\\ &= e^{\pi/4}\exp\{-i\frac{\pi}{4}-2\pi n+2\pi n i\}\\ &= \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}(1-i)e^{-2\pi n}.\end{aligned}$$

2. Utveckla funktionen

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

i Laurentserie i området $0<|z-i|<R$, där $R>0$. Vad är det maximala värdet på R?

*Lösning.*Vi får

$$f(z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}=T_1+T_2.$$

Den första termen T_1 är redan på Laurentserieform. Vi skriver

$$\begin{aligned}T_2 &= -\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}=-\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2i+(z-i)}\\ &= (-\frac{1}{2i})\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^{n+2}}\cdot(-1)^{n+1}\cdot(z-i)^n\end{aligned}$$

Här har vi utnyttjat att den geometriska serien är konvergent för $|z-i|<2$. Vi ser också att avståndet från i till närmaste singulära punkt $-i$ är 2 och därför är det maximala värdet på R lika med 2.

Svar. Laurentserien är

$$\sum_{n=-1}^{\infty}a_n(z-i)^n$$

där

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{(2i)^{n+2}}\cdot(-1)^{n+1}, & n\ge 0\\ 1/(2i) & n=-1.\end{cases}$$

3. Hur många nollställen har funktionen

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2$$

i högra halvplanet?

Vi betraktar argumentvariationen av $p(z)$ längs kurvan $\Gamma_R = C_R + I_R$ där C_R är halvcirkeln i positiv led från $-iR$ till iR, dvs. $\Gamma_R(\varphi) = Re^{i\varphi},\ -\pi \leq \theta \leq \pi$ och I_R är det räta linjestycket längs imaginära axeln från iR till $-iR$.

Vi får

$$\begin{aligned}\Delta_{C_R} \arg p(z) &= \Delta_{C_R} \arg z^4 \cdot \left(1 + \frac{-2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{-1}{z^3} + \frac{2}{z^4}\right) \\ &= \Delta_{C_R} \arg z^4 + \Delta_{C_R} \arg \left(1 + \frac{-2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{-1}{z^3} + \frac{2}{z^4}\right) \\ &\approx 4\pi.\end{aligned}$$

På I_R skriver vi

$$\begin{aligned}f(iy) &= u(y) + iv(y) \\ &= (y^4 - 3y^2 + 2) + i(2y^3 - y).\end{aligned}$$

u har nollställen i $y = \pm\sqrt{2}$ och $y = \pm 1$. v har nollställen i $y = 0$ och $y = \pm 1/\sqrt{2}$.

För argumentvariationen längs I_R får man tabellen

y	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	∞
$u(y)$	$+\infty$	0	0	$+$	$+$	$+$	0	0	$+\infty$
$v(y)$	$-\infty$	$-$	$-$	0	0	0	0	$+$	$+\infty$

Denna tabell ger att gäller att $\lim_{R\to\infty} \arg\ p(iR) = -0$ och att $\lim_{R\to\infty} \arg\ p(-Ri) = +0$. Den totala argumentvariationen blir då för R tillräckligt stort

$$\Delta_{\Gamma_R} p(z) = 0 + 4\pi = 4\pi.$$

Svar. Två nollställen till p ligger i högra halvplanet.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 4x + 5}\, dx.$$

Lösning.

Betrakta funktionen

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2 + 4z + 5},$$

och integrera f runt den enkla slutna kurvan Γ_R som består av halvcirkeln C_R i det övre halvplanet med radie R, samt linjen från $z = -R$ till $z = R$. Nämnaren $(z^2 + 4z + 5)^2$ kan skrivas som $(z - 2 - i)^2(z - 2 + i)^2$ medan täljaren e^{2iz} är skild från noll för alla z. Därmed ser vi att det finns två poler av andra ordningen, varav polen $z = -2+i$ är den enda som ligger innanför Γ_R (om vi utan inskränkning antar att $R > 2$). Residysatsen ger

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{z^2+4z+5}\,dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^2+4z+5}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^2+4z+5}\,dz \\ &= 2\pi i \mathrm{Res}[f(z), -2+i] \\ &= 2\pi i \left.\frac{e^{2iz}}{2z+4}\right|_{z=-2+i} \\ &= \pi e^{-2} e^{-4i}\end{aligned}$$

På C_R kan vi använda ML-olikheten. L fås som πR, och då $|z^2+4z+5| \geq |z|^2 - 5|z| - 4 = R^2 - 5R - 4$ ochvi får att

$$\left|\frac{e^{2iz}}{z^2+4z+5}\right| \leq \frac{e^{-2y}}{R^2-4R-5} \leq \{y \geq 0 \text{ på } C_R\} \leq \frac{1}{R^2-4R^2-5} = M.$$

Nu ser vi att

$$0 \leq \left|\int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^2+4z+5}\,dz\right| \leq ML = \pi.$$

Detta ger avslutningsvis att

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^2+4z+5}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+4x+5}\,dx = \pi e^{-2} e^{-4i}.$$

och om vi identifierar imaginärdelarna i den sista ekvationen fås

$$\textbf{Svar:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+4x+5}\,dx = -\frac{\pi}{e^2}\sin 4.$$

5. Finn en Möbiustransformation $w = f(z)$ som avbildar punkerna $z_1 = -2i$, $z_2 = -2$ och $z_3 = 0$ på $w_1 = 0$, $w_2 = i$ och $w_3 = 1$. Visa att

$$D = \left\{z : |z+1+i| < \sqrt{2}\right\}$$

avbildas på

$$\tilde{D} = \left\{z : \left|z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Lösning. Vi ansätter lösningen på formen

$$z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Eftersom $z_1 = -2i$ avbildas på $w_1 = 0$ kan vi välja $a = 1$ och $b = 2i$. Vi observarar därvid att a, b, c och d är bara bestämda upp till en multiplikativ komplex faktor. Villkoret at $z_3 = 0$ avbildas på $w_3 = 1$ ger sedan

$$\frac{2i}{d} = 1,$$

dvs $d = 2i$. Slutligen ger villkoret att $z_2 = -2$ avbildas på $w_2 = i$ ekvationen

$$\frac{-2+2i}{-2c+2i} = i$$

och vi får att $c = -1$.

Punkterna $z_1 = -2i$, $z = -2$ och $z_3 = 0$ ligger på cirkeln $C = \{z : |z+1+i| = \sqrt{2}\}$ och är orienterade medurs. På samma sätt ligger punkterna $w_1 = 0$, $w_2 = i$ och $w_3 = 1$ på cirkeln $\tilde{C} = \{z : |z - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}| = 1/\sqrt{2}\}$ och är också orienterade medurs. Området innanför C avbildas då på området innanför $\tilde{C}$, dvs. D avbildas på $\tilde{D}$. Alternativt kan man se att tex medelpunkten till C, $z = -1 - i$, avbildas på punketen $\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$ som ligger innanför $\tilde{C}$.

Svar. Den sökta Möbiustransformationen är
$$w = \frac{z + 2i}{-z + 2i}.$$