Existens och entydighet av lösning.

Om differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ är definerad och $f(x, y)$ och $f'_y(x, y)$ är kontinuerlig för alla (x, y) nära punkten (x_o, y_0), då finns det ett intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, för något litet $\epsilon > 0$, så att det finns en entydig lösning $y(x)$ som uppfyller

$$\frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x)); \text{ på intervallet } (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon),$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Separable differential ekvationer. Lösning

. Antag att differentialekavtionen är på formen

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$$

Ekvationen $g(y_0) = 0$ ger $\frac{dy}{dx} = 0$ som ger de konstanta lösningar $y = y_0$. Pga local entydighet så kan inte någon annan lösningskurva skära linjerna för dessa konstanta lösningar, så har då $g(y(x)) \neq 0$. Vi dividerar differentialekvationen med $g(y)$:

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Vi integrerar båda led och pga formel för variabelbyte får vi:

$$\int^{y(x)} \frac{1}{g(y')dy} = \int^{x} f(x')dx + C.$$

Linjära differentialekvationer, första ordningen

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = h(x).$$

På standard form:

$$\frac{dy}{dx} + b(x)y = h(x).$$

Existens och entydighet för linjära diff. ekv.

Om de givna funktionerna $a(x)$, $b(x)$ och $h(x)$ samt $a(x) \neq 0$ på intervallet I, och $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ då existerar en entydig lösning $y(x)$ till differensialexvation på hela intervallet I sådan att $y(x_0) = y_0$

Dvs. starvärdeproblemet har en unik lösning på intervallet I

icke-linjära differentialekvationer, första ordning

Några exempel

Exempel 1

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

Lösningar: $y(x) = 0$, $y(x) = (x - c)_+$ för alla reella tal c.
Lösningar som skär $\{y = 0\}$ är inte entydiga.

Exempel 2

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Lösning för givet starvärde $y(0) = y_0$ är unik, men existensintervallet beror på startvärde, För $y(0) = 1$ har vi lösningen

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Tillbaka till linjära diff.ekv.

$$\frac{dy}{dx} + b(x)y = h(x).$$

kallas för **inhomogen** om $h(x)$ inte är noll.

Motsvarande **homogena** diff.ekvation är

$$\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0.$$

Den homogena differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0.$$

kan lösas genom metoden **separation av variabler**: Först har vi den triviala lösningen $y(x) = 0$ för alla x. Annars $y(x)$ aldrig 0 så vi kan dividera med y och flytta om:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -b(x)$$

Integration ger

$$\log(|y(x)|) = -\int^x b(t)dt + C.$$

Sammanfattningsvis får vi lösningen

$$y(x) = C_1 \exp(-\int^x b(t)dt).$$

Exempel

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 1$$

Vi skriver diff.ekvationen på standardform och löser sedan motsvarande homogena ekvation (tillsvidare) - på tavlan.

Lösning av ihomogen diff.ekvation när homogen lösning känd

Ansätt lösningen $y(x) = v(x)y_h(x)$ där $y_h(x)$ är lösningen till till den motsv. homogena ekvationen. / alternativt multiplisera den inhomoga standard form diff.ekvationen med faktorn $(y_h(x))^{-1}$. Detta kommer att redusera diff.ekvationen till

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{h(x)}{y_h(x)}$$

Efter integration och tillbakasättning får vi ch slutligen

$$y(x) = y_h(x)(\int^x \frac{dv}{dx}dx') + Cy_h(x)$$

Alternativ formulering av ovanstående Faktorn $m(x) = (y_h(x))^{-1} = \exp(\int^x b(x')dx$ kallas **integrerande faktor**..
Efter multiplikation av av båda sidor av den homogena differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} + b(x)y = h(x).$$

med den integrerande faktorn $m(x)$ får vi alltså differentialekvation.

$$\frac{d(m(x)y(x))}{dx} = m(x)h(x),$$

vilken vi kan integrera och sedan lösa ut $y(x)$.

Från startväredt (exempel $y(1) = 1$) kan integrations-konstanten i lösningen bestämmas.