Ett problemexempel med Laplace ekvation En tunn platta motvartar rektangeln $\{(x, y) : 0 < x < 4, 0 < y < 10\}$. temperatur oberoende av tiden. $u(x, y)$, som uppfyller Laplace ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Låt $u(x, y)$ plattan vara värmeisolerad längs
kanterna $x = 0$ och $x = 4$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 4) = 0$$

Kanten $y = 10$ hålls på temperaturen $u(x, 10) = 0$
Kanten $y = 10$ hålls på temperaturen $u(x, 0) = 50(2 - |z - 2|)$.

Beräkna plattans temperatur $u(x, y)$

1. Ansätt först en produktlösning $u(x, y) = X(x)Y(y)$ efter insättning kan variablerna separeras
$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda,$$
för någon konstant λ.

2. Randvillkoret på $u(x, y)$ kan överföras till följande randvilkor på X
$$X'(0) = X'(4) = 0.$$
som tillsammans med ekvationen $X''+\lambda X = 0$ ger lösningarna $\{X_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\cos(\frac{n\pi x}{4})\}_{n=0}^{\infty}$ för $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16}$.

3. Vi för produktlösningarna $u_n(x, y) = Y_n(y)\cos(\frac{n\pi x}{4})$, där Y_n uppfyller differentialekvationen $Y_n'' = \frac{n^2\pi^2}{16} Y_n$
Y_n ska uppfylla randvillkoren $Y_n(10) = 0$ för $n \geq 0$,
$Y_0(0) = \frac{a_0}{2}$ och $Y_n(0) = a_n$ för $n > 0$,där a_n är koefficienterna i cosinusserieutvecklingen av $h(x) = 50(2 - |2 - x|)$:
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{4})$$
Vi ser att $Y_0 = \frac{10-x}{10}\frac{a_0}{2}$
För $n > 0$ ser vi att $Y_n(y) = c_n e^{\frac{n\pi}{4} y} + d_n e^{-\frac{n\pi}{4} y}$. För att uppfyll randvillkoren får vi
$$Y_n(y) = \frac{\sinh(\frac{n\pi}{4}(10 - x))}{\sinh(\frac{n\pi}{4}(10))} a_n$$

4. Vi utför cosinusserie-utvecklingen av $h(x) = 2 - |2 - x|$. Efter en massa integreing med partiell integrering får vi

   $a_0 = 100$
   $a_{4l+2} = -\frac{400}{(2l+1)^2\pi^2}$ för$l \geq 0$ heltal
   $a_n = 0$ för $n = 4l + 1, n = 4l + 3$ and $n = 4l + 4,$ där $l \geq 0$ heltal

5. Vi sätter samman produktlösningarna:

$$u(x, y) = 5(10-y) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{400}{(2l+1)^2\pi^2} \frac{\sinh(\frac{(2l+1)\pi}{2}(10-x))}{\sinh(\frac{(2l+1)\pi}{2} \cdot 10)} \cos(\frac{(2l+1)\pi}{2} x).$$