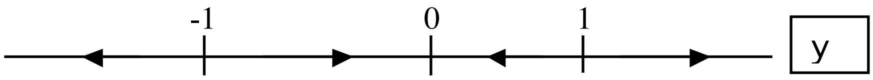
KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 10 september 2012, kl 08.15-09.45.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Klassificera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna (stationära lösningarna) till den autonoma differentialekvationen $y \ = y(y+1)(y \quad 1)$.
Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim\limits_{x} y(x)$ är ändligt.

…………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Vi börjar med att bestämma de stationära lösningarna. De erhålles då derivatan är lika med noll.
Vi får följande lösningar: $y_1 = 0$, $y_2 = \quad 1$ och $y_3 = 1$.
Nu över till det endimensionella fasporträttet. Vi studerar derivatans tecken.



$y_1 = 0$ är asymptotisk stabil
$y_2 = \quad 1, y_3 = 1$ är instabila.
Gränsvärdet existerar för $\{y_0 : \quad 1 \quad y_0 \quad 1\}$. Gränsvärdet är beroende av startvärdet.
För $y_0 = \quad 1$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t} y(t) = \quad 1$.
För $\quad 1 < y_0 < 1$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t} y(t) = 0$.
För $y_0 = 1$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t} y(t) = 1$.
SVAR: De stationära lösningarna är $y_1 = 0$, $y_2 = \quad 1$ och $y_3 = 1$.
$y_1 = 0$ är asymptotisk stabil
$y_2 = \quad 1, y_3 = 1$ är instabila.
Gränsvärdet existerar för $\{y_0 : \quad 1 \quad y_0 \quad 1\}$.
För $y_0 = \quad 1$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t} y(t) = \quad 1$.
För $\quad 1 < y_0 < 1$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t} y(t) = 0$.
För $y_0 = 1$ är gränsvärdet $\lim\limits_{t} y(t) = 1$.

2 I en differentialekvation har substitutionen $y = \dfrac{1}{z}$ gjorts.
Då har differentialekvationen $xz \quad z = x$, $x > 0$ erhällits.
Bestäm den lösning $y = y(x)$ som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.
Bestäm även lösningens existensintervall.

…………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Vi har en linjär differentialekvation. Omforma den till normalform. $z \quad \dfrac{1}{x} z = 1 \quad (1)$

Bestäm en integrerande faktor. $e^{\ \frac{1}{x}dx} = e^{\ \ln x} = e^{\ln x \ 1} = \dfrac{1}{x}$

Multiplicera (1) med integrerande faktor. $\dfrac{1}{x} z \quad \dfrac{1}{x^2} z = \dfrac{1}{x}$

Nu kan det nya vänstra ledet skrivas som en derivata. $\dfrac{d}{dx} \ \dfrac{1}{x} z \ = \dfrac{1}{x}$.

Integrera med avseende på x. $\frac{z}{x} = \ln x + C$ eller $z = x(\ln x + C)$.

Vi har då att $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x(\ln x + C)}$. Villkoret $y(1) = 1$ ger $C = 1$.

Den sökta lösningen är $y = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.

Här skall $x(1 + \ln x) \quad 0$, $\ln x \quad 1$, $x \quad e^{\ 1} = \frac{1}{e}$.

Lösningens existensintervall skall innehålla $x = 1$.

Vi får följande existensintervall. $x : \frac{1}{e} < x$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$ och existensintervallet är $x : \frac{1}{e} < x$ ..

3.. En tank, på 300 liter innehåller 200 liter vatten och 100 gram salt.
En saltlösning med 4 gram per liter pumpas in med hastigheten av 4 liter per minut.
Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut.
När är tanken fylld ?
Vad är koncentrationen i tanken då den är fylld ?
....

Lösningsförslag

Vi skall bestämma tidpunkten, t_f, då tanken är fylld.

Den erhålles ur ekvationen $300 = 200 + t_f(4 \quad 2)$ vilket ger $t_f = 50$.

Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t .

Vi ställer upp begynnelsevärdesproblemet för tanken.

$$\frac{dS(t)}{dt} = 4 \quad 4 \quad 2 \ \frac{S(t)}{200 + t(4 \quad 2)} , \quad S(0) = 100$$

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen och vi bestämmer dess lösning med hjälp av integrerande faktor. Om forma först differentialekvationen $\frac{dS(t)}{dt} + \frac{1}{100 + t} S(t) = 16$.

En integrerande faktor är $e^{\ \frac{dt}{100+t}} = e^{\ln(100+t)} = 100 + t$.

Multiplicera differentialekvationen med $100 + t$.

Vi får $(1000 + t)\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 16(100 + t)$

och det nya vänstra ledet är en derivata $\frac{d}{dt}((100 + t)S(t)) = 16(100 + t)$.

Integrera med avseende på t: $(100 + t)S(t) = 8(100 + t)^2 + C$.

Villkoret $S(0) = 100$ ger $C = 100 \quad 100 \quad 8(100)^2 = \quad 7 \quad 10000 = \quad 70000$.

Saltmängden i tanken vid tiden t är $S(t) = \frac{8(100 + t)^2 \quad 70000}{100 + t} = 8(100 + t) \quad \frac{70000}{100 + t}$.

Saltmängden vid fylld tank är $S(50) = 8(50 + 100) \quad \frac{70000}{100 + 50} = 1200 \quad \frac{1400}{3} = \frac{2200}{3}$.

Koncentrationen i tanken vid fylld tank är $\frac{S(50)}{300} = \frac{2200}{3 \ 300} = \frac{22}{9} \quad 2,4$ gram per liter.

Vid starten var koncentrationen i tanken $0,5$ gram per liter.

SVAR: Tanken är fylld efter $t_f = 50$ minuter .

Koncentrationen i tanken vid fylld tank är $\frac{22}{9} \quad 2,4$ gram per liter.