OBS ! SKRIV TYDLIGT ! OBS ! INGA LÖSA PAPPER LÄMNAS IN !

……………………………..… ………………….……. …………………. ……………..
Efternamn Förnamn Personnummer Program
| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |
……………………………………

KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, måndagen den 24 september 2012, kl 08.15-09.45.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. En lösning till den homogena differentialekvationen $t^2y''(t)-ty'(t)+y(t)=0$, $t>0$
är på formen $y(t)=t^n$, $n \in N$ (n är ett naturligt tal).
Bestäm allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen
$t^2y''(t)-ty'(t)+y(t)=9t^4$, $t>0$.
……………………………………………………………………..………

Lösningsförslag:
Vi ansätter $y(t)=t^n$.
Insättning i den homogena differentialekvationen ger
$t^2n(n-1)t^{n-2}-tnt^{n-1}+t^n=0$
$t^n(n(n-1)-n+1)=0$
$t^n(n-1)(n-1)=0$
Vi erhåller $n=1$ och således är $y(t)=t$ en lösning till den homogena differentialekvationen.
(En okulärbesiktning av den homogena differentialekvationen ger direkt detta.)
För att bestämma den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen använder vi reduktion av ordning.
Sätt $y(t)=tz(t)$ i den inhomogena differentialekvationen.
$t^2\{tz''(t)+2z'(t)\}-t\{tz'(t)+z(t)\}+tz(t)=9t^4$
$t^3z''(t)+t^2z'(t)=9t^4$, $tz''(t)+z'(t)=9t^2$.
Ordning kan reducera genom att sätta $u(t)=z'(t)$, $u'(t)=z''(t)$.
Vi får $tu'(t)+u(t)=9t^2$. Observera att vänstra ledet är en derivata.
(Annars bestämmer man en integrerande faktor och multiplicerar ekvationen med den.)
$\frac{d}{dt}\{tu(t)\}=9t^2$
Integrera med avseende på t .
$tu(t)=3t^3+C_1$
$u(t)=3t^2+\frac{C_1}{t}$
Men $z'(t)=u(t)$ och vi får $z'(t)=3t^2+\frac{C_1}{t}$.
Integrera med avseende på t .
$z(t)=t^3+C_1\ln t+C_2$
Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen är
$y(t)=tz(t)=t^4+C_1t\ln t+C_2t$
Här är C_1 och C_2 godtyckliga reella konstanter.

SVAR: Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen är
$$y(t)=t^4+C_1t\ln t+C_2t$$

2 Antag att en partikels rörelse ges av systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Vad händer med en partikel placerad i punkten (3,4) efter lång tid ?
Bestäm även systemets allmänna lösning.

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Bestäm först matrisens egenvärden.

De erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -13 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 13 = (\lambda+2)^2 + 9$. Egenvärden är $\lambda = -2 \pm 3i$.

En partikel placerad i punkten (3,4) hamnar efter lång tid i origo, ty realdelen av egenvärdet är negativt.

Den allmänna lösningen är en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar.
Vi börjar med att bestämma en komplex lösning och då behövs även en egenvektor.
Vi tar egenvärdet $\lambda = -2 \pm 3i$ och sätter in det i ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

$\begin{pmatrix} -4-(-2+3i) & -13 \\ 1 & 0-(-2+3i) \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} -2-3i & -13 \\ 1 & 2-3i \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2-3i \\ -1 \end{pmatrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = e^{(-2+3i)t}\begin{pmatrix} 2-3i \\ -1 \end{pmatrix}$.

Real- och imaginärdel av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.
Vi omformar den komplexa lösningen.

$$\mathbf{Z} = e^{-2t}\left(\cos 3t + i\sin 3t\right)\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{Z} = e^{-2t}\left(\cos 3t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - i^2 \sin 3t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + i\left(-\cos 3t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 3t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{Z} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\cos 3t + 3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + ie^{-2t}\begin{pmatrix} -3\cos 3t + 2\sin 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\cos 3t + 3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^{-2t}\begin{pmatrix} -3\cos 3t + 2\sin 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\cos 3t + 3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -3\cos 3t + 2\sin 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix}.$$

SVAR En partikel placerad i punkten (2,3) hamnar efter lång tid i origo.
Den allmänna lösningen är

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\cos 3t + 3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -3\cos 3t + 2\sin 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm de kritiska punkterna till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + x^2 + 2 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$.

Klassificera de kritiska punkterna med avseende på stabilitet/instabilitet samt ange typ (nod, sadelpunkt, spiral).

……………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag

Bestäm först de kritiska punkterna.
I de kritiska punkterna är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.

Hastighetsvektorn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + x^2 + 2 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$.

Vi erhåller följande icke-linjära ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} -3y + x^2 + 2 \\ y - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} y - 3y + 2 = 0 \\ x = \pm y \end{cases}.$$

De kritiska punkterna är: $(1,1)$ och $(-1,1)$.
För att klassificera de kritiska punkterna studeras dessa lokalt. Vi kan då antingen införa ett nytt koordinatssystem med origo i den kritiska punkten och ta med den linjära delen av systemet eller direkt bestämma Jacobimatrisen i den kritiska punkten. Vi väljer det senare.

Hastighetsvektorn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + x^2 + 2 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$ ger oss Jacobimatrisen $g'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2x & -3 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$.

Insättning av respektive punkt ger oss en matris, vars egenvärden avgör typ och stabilitet.
Egenvärdena λ till en matris $\mathbf{A}$ erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Punkten $(1,1)$ ger $\mathbf{g}'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$.

Skilda reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

Punkten $(-1,1)$ ger $\mathbf{g}'(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 4 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}$.

Komplexa egenvärden med negativ realdel innebär att den kritiska punkten är en stabil spiral.

Detta gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: $(1,1)$ är sadelpunkt och därmed instabil. $(-1,1)$ punkten är en stabil spiral.