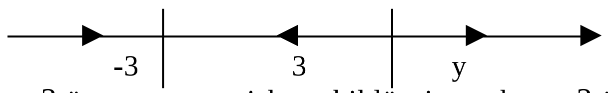
KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 1, måndagen den 8 april 2013, kl 08.15-09.45.
Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet de kritiska punkterna till den autonoma differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 9$. Bestäm de startvärden y_0 för vilka $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt.
OBS ! Man behöver ej lösa ekvationen.
……………………………………………………………………………..…………..

Lösningsförslag:
Vi bestämmer först de kritiska punkterna, konstantlösningarna.
Dessa erhålles då derivatan är lika med noll.
Faktorisera högra ledet: $\dfrac{dy}{dx} = (y+3)(y-3)$. Konstantlösningarna -3 är 3.
Studera derivatans tecken och rita upp funktionens uppförande i faslinjen.



$y = -3$ är en asymptotiskt stabil lösning och $y = 3$ är en instabil lösning.
$\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt $\{y_0 : y_0 \leq 3\}$.

SVAR: $y = -3$ är en asymptotiskt stabil lösning. $y = 3$ är en instabil lösning.
$\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$ är ändligt $\{y_0 : y_0 \leq 3\}$.

2. I en enkel populationsmodell för antalet individer, $P(t)$, är den relativa tillväxthastigheten konstant, a.
I en annan modell är den relativa tillväxthastigheten summan av två termer.
Den ena termen är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot populationen med en negativ proportionalitetskonstant, b.
En tredje modell erhålles genom att korrigera den andra modellen på följande sätt:
avlägsna ett konstant antal per tidsenhet, c.
Ställ upp dessa modeller.
Studera därefter vad som händer efter lång tid, då konstanterna sätts till $a = 7$, $b = -1$ och $c = 10$.
……………………………………………………………………………..…………..

Lösningsförslag:
Modell 1: $\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt} = a$. Modell 2: $\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt} = a + bP$. Modell 3: $\dfrac{dP}{dt} = P(a + bP) - c$.
Insättning av konstanternas numeriska värden $a = 7$, $b = -1$ och $c = 10$ ger:
Modell 1: $\dfrac{dP}{dt} = 7P$. Modell 2: $\dfrac{dP}{dt} = P(7 - P)$. Modell 3: $\dfrac{dP}{dt} = P(7-P) - 10 = (P-2)(5-P)$.
Vad händer efter lång tid ?
För modell 1 är derivatan större än noll, då växer populationen obegränsat om startvärdet $P_0 > 0$.
För modell 2 är derivatan större än noll då $0 < P_0 < 7$ och mindre än noll då $P_0 > 7$.
Populationen går mot $P = 7$ om startvärdet $P_0 > 0$.
För modell 3 är derivatan större än noll då $2 < P_0 < 5$ och mindre än noll då $P_0 < 2$ och $P_0 > 5$.
Populationen går mot $P = 5$ om startvärdet $P_0 > 2$.
Populationen förblir konstant lika med två om startvärdet $P_0 = 2$.
Med startvärden $P_0 < 2$ dör populationen ut.

SVAR: Modell 1: $\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt} = a$. Modell 2: $\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt} = a + bP$. Modell 3: $\dfrac{dP}{dt} = P(a + bP) - c$.
För långtidsbeteendet se ovan.

3. Lös ekvationen $(x-x^2)y' = y + y^2$, där $y(2)=2$ och ange lösningens existensintervall.
……………………………………………………………………………..……..
Lösningsförslag:
Vi har en separabel differentialekvation, men den är även Bernoullsk .
Vi löser den som en separabel.
Konstantlösningarna är i detta fall ej av intresse.
Omforma differentialekvationen och förutsätt att $y \neq 0$, $y \neq -1, x \neq 0, x \neq 1$.

$$\frac{1}{y\,(1+y)}y' = \frac{1}{x\,(1-x)}$$

Partialbråksuppdela de rationella funktionerna.
Handpåläggningsmetoden ger oss följande:

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right)y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

Integrera med avseende på x. I vänstra ledet blir det en y-integration.

$$\ln|y| - \ln|1+y| = \ln|x| - \ln|1-x| + \ln|C_1|$$

$$\frac{y}{1+y} = \pm C_1\frac{x}{1-x} = C\frac{x}{1-x}$$

Bestäm konstanten.

Villkoret $y(2)=2$ ger: $\dfrac{2}{1+2} = C\dfrac{2}{1-2}$, $C = -\dfrac{1}{3}$.

Insättning och hyfsning ger: $3y(1-x) = -x(1+y)$, $3y - 2yx = -x$

$y = \dfrac{x}{2x-3}$. Här måste $x \neq \dfrac{3}{2}$.

Lösningens existensintervall söktes.

Då är två intervall möjliga: $\left\{x : x > \dfrac{3}{2}\right\}$ eller $\left\{x : x < \dfrac{3}{2}\right\}$.

Det givna villkoret , $y(2)=2$, ger att det första intervallet är det aktuella.

SVAR: Differentialekvationen lösning är $y = \dfrac{x}{2x-3}$ och existensintervallet är $\left\{x : x > \dfrac{3}{2}\right\}$.