KTH Matematik
SF1633, Differentialekvationer I.
Kontrollskrivning nr 2, tisdagen den 30 april 2013, kl 08.15-09.45.
Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

1. $y_1(x) = x$ är en lösning till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$.
Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen. $x^2y'' - 2xy' + 2y = -x$, $x > 0$.
Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 1$ och $y'(1) = 4$.
………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
För att bestämma den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen använder vi reduktion av ordning.
Vi ansätter $y(x) = xz(x)$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger.
$x^2\{xz''(x) + 2z'(x)\} - 2x\{xz'(x) + z(x)\} + 2xz(x) = -x$
$x^3z''(x) = -x$, $z''(x) = -x^{-2}$.
Integrera med avseende på x två gånger .
$z'(x) = x^{-1} + C_1$, $z(x) = \ln x + C_1x + C_2$. C_1 och C_2 är godtyckliga reella konstanter.
Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen är
$y(x) = xz(x) = x\ln x + C_1x^2 + C_2x$
Nu över till att bestämma konstanterna.
Vi behöver derivatan. $y'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} + C_1 2x + C_2$.

Villkoren ger $\begin{cases} 1 = y(1) = 0 + C_1 + C_2 \\ 4 = y'(1) = 0 + 1 + 2C_1 + C_2 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$.

Den sökta lösningen är $y(x) = x\ln x + 2x^2 - x$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $y(x) = x\ln x + C_1x^2 + C_2x$ och den lösning som uppfyller de givna villkoren är $y(x) = x\ln x + 2x^2 - x$.

2 Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Origo är den enda stationära punkten. Avgör dess karaktär, dvs stabilitet / instabilitet samt typ.
………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Den allmänna lösningen är en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar.
Bestäm först matrisens egenvärden.
De erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Vi får $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$. Egenvärden är $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$.
Bestäm tillhörande egenvektor.
Insättning av egenvärdena i ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

$\underline{\lambda_1 = 2}$

$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_1 = e^{\lambda_1 t}\mathbf{K}_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = -3}$

$\begin{pmatrix} 1-(-3) & 1 \\ 4 & -2-(-3) \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = e^{\lambda_2 t}\mathbf{K}_2 = e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Vi har erhållit reella egenvärde n med skilda tecken.
Detta innebär att origo är en sadelpunkt och således instabil.

SVAR Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Origo är en sadelpunkt och således instabil.

3. Bestäm de kritiska punkterna till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-xy \\ x-y^3 \end{pmatrix}$.

Klassificera de kritiska punkterna med avseende på stabilitet/instabilitet .

……………………………………………………………………….……………

Lösningsförslag

Bestäm först de kritiska punkterna.
I de kritiska punkterna är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.

Hastighetsvektorn $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-xy \\ x-y^3 \end{pmatrix}$.

Vi erhåller följande icke-linjära ekvationssystem:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-xy \\ x-y^3 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} y^4 = 1 \\ x = y^3 \end{cases}$. "y-ekvationen" har endast två reella lösningar.

De kritiska punkterna är: $(1,1)$ och $(-1,-1)$.
För att klassificera de kritiska punkterna studeras dessa lokalt. Vi kan då antingen införa ett nytt koordinatssystem med origo i den kritiska punkten och ta med den linjära delen av systemet eller direkt bestämma Jacobimatrisen i den kritiska punkten. Vi väljer det senare.

Hastighetsvektorn $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-xy \\ x-y^3 \end{pmatrix}$ ger oss Jacobimatrisen $g'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$.

Insättning av respektive punkt ger oss en matris, vars egenvärden avgör typ och stabilitet.
Egenvärdena λ till en matris $\mathbf{A}$ erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = 0$.

Punkten $(1,1)$ ger $\mathbf{g}'(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$.

Reella sammanfallande egenvärden med negativt tecken innebär stabilitet.

Punkten $(-1,1)$. ger $\mathbf{g}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ och vi får $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 4 = (\lambda+1)^2 - 5$.

Reella egenvärden med olika tecken. Detta innebär instabilitet.

Detta gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: $(1,1)$ är stabil. och $(-1,1)$ punkten är instabil.