Institutionen för Matematik, KTH

FX-tentamen, Differentialekvationer II

7/6 2013, 9.00-10.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1.(4 poäng) Bestäm lösningen $u(x,t)$ till värmeledningsekvationen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ ,\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,\\ &u(x,0)=\delta(x)\ ,\quad -\infty<x<\infty\,,\end{aligned} \tag{1}$$

där δ är "delta-funktionen", som uppfyller $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)dx=1$ och $\delta(x)=0$ för $x\neq 0$.

Låt $U(\omega,t):=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ *vara Fouriertransformen i* x*-led. Då ger Fouriertransformering i* x*-led av* (1)

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t}+i\omega U(\omega,t)=-\omega^2U(\omega,t),\quad t>0$$

för varje $\omega\in\mathbb{R}$. *Denna ordinära differentialekvation har lösningen*

$$U(\omega,t)=U(\omega,0)e^{-\omega^2t-i\omega t}\,.$$

Begynnelsevillkoret $\delta(x)=u(x,0)$ *ger (se BETA)* $U(\omega,0)=1$ *och*

$$U(\omega,t)=e^{-\omega^2t-i\omega t}$$

vars inverstransform är (se BETA)

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2t-i\omega t}\}(x)=\mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2t}\}(x-t)=\frac{e^{-(x-t)^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}}.$$