Institutionen för Matematik, KTH

Kontrollskrivning 1, Differentialekvationer II (SF1634) den 4/2 2013, 13.15-15.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng. Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** *av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta). Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.*

1.(4 poäng) Lösningen till en differentialekvation $y' = f(y)$ kan bli oändlig på ändlig tid om f växer snabbare än linjärt, vilket illustreras av följande uppgift. Låt $w : [0,1) \to \mathbb{R}$ lösa

$$\begin{aligned} w'(t) + w^2(t) &= 0 \\ w(0) &= p \end{aligned}$$

för något $p \in \mathbb{R}$. Bestäm p så att $\lim_{t\to 1-} w(t) = -\infty$.

Separation av variabler ger

$$\int \frac{dw}{w^2} = -\int dt$$

vilket på intervallet $[0,t]$ *medför att*

$$-\frac{1}{w(t)} + \frac{1}{w(0)} = -t$$

så

$$w(t) = \frac{1}{\frac{1}{w(0)} + t}$$

och villkoret $\lim_{t\to 1-} w(t) = -\infty$ *visar att* $w(0) = -1$ *och* $w(t) = 1/(t-1)$.

2.(4 poäng) Utböjningen $u : [1,2] \to \mathbb{R}$ av en sträng bestäms av randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -(xu'(x))' &= 1\,, \qquad 1 < x < 2 \\ u(1) = u(2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Bestäm den maximala utböjningen.

Integration av ekvationen $-(xu'(x))' = 1$ *ger*

$$-xu' = x + C_1\,,$$

för en godtycklig konstant C_1. *Detta kan förenklas till* $u' = -1 - \frac{C_1}{x}$. *Upprepepad integration visar att*

$$u(x) = -x - C_1 \ln x + C_2$$

och randvillkoren medför att

$$0 = -1 + C_2$$

och

$$0 = -2 - C_1 \ln 2 + 1\,,$$

så

$$u(x) = -x + \frac{\ln x}{\ln 2} + 1\,.$$

Utböjningen är maximal när $u'(x_*) = 0$ *vilket ger*

$$0 = -1 + \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x_*}$$

vars lösning är $x_* = 1/\ln 2$ *och vi får den maximal utböjningen* $u(x_*) = \frac{\ln(\frac{2}{\ln 2}) - 1}{\ln 2}$.

3.(4 poäng) Formulera och bevisa en sats om formen för allmänna lösningen till andra ordningens homogena linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter.