Institutionen för Matematik, KTH

Kontrollskrivning 2, Differentialekvationer II 12/3 2013, 10.15-12.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** *av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta). Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.*

1.(4 poäng) Populationen $x(t)$ och $y(t)$ av två arter beskrivs av systemet

$$x'(t) = x(t)\big(4 - 4x(t) - 4y(t)\big)\,,$$
$$y'(t) = y(t)\big(3 - 4y(t) - 2x(t)\big)\,.$$

1a. Verifiera att $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är en jämviktspunkt till systemet och bestäm karaktären av jämviktspunkten.
1b. Bestäm $\lim_{t\to\infty}\big(x(t), y(t)\big)$, om $\big(x(0), y(0)\big)$ är nära $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ekvationen kan skrivas

$$x' = 4x - 4x^2 - 4xy =: g_1(x, y)$$
$$y' = 3y - 4y^2 - 2xy =: g_2(x, y)$$

vars Jacobian

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} 4 - 8x - 4y & -4x \\ -2y & 3 - 8y - 2x \end{bmatrix}.$$

Vi ser att $g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, 0)$ och alltså är $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en jämviktspunkt. I jämviktspunkten är

$$g'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jacobianens egenvärden λ löser

$$0 = (-\lambda - 2)(-\lambda - 2) - 2 = (\lambda + 2)^2 - 2$$

som ger $\lambda = -2 \pm \sqrt{2}$ och båda egenvärden är negativa. Eftersom egenvärdena är negativa har det linjariserade systemet, $X'(t) = g'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})X(t)$, samma karaktär lokalt kring $X = (0, 0)$ som vårt ursprungliga ickelinjära problem har kring jämviktspunkten och därför är jämviktspunkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ asymptotiskt stabil, d.v.s. $\lim_{t\to\infty}\big(x(t), y(t)\big) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ om $\big(x(t), y(t)\big)$ är nära $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2.(4 poäng) Utböjningen $u(x,t)$ av en svängande sträng med längden 1, som är fast inspänd i ändarna, löser vågekvationen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,, \quad t > 0 \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $u(x,0) = 0$ och $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1$ för $0 < x < 1$. Bestäm $u(x,t)$ som en Fourierserie.

Variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ insatt i (1) ger $T''(t)X(x) = T(t)X''(x)$ och

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda\ .$$

Den sista ekvationen och dess randvillkor $X(0) = X(1) = 0$ har de nollskilda lösningarna $X(x) = \sin(n\pi x)$ för $\lambda = -n^2\pi^2$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$.. Detta ger $T''(t) = -n^2\pi^2 T(t)$, som har lösningen $T(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)$ och $T(t)X(x) = \big(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)\big)\sin(n\pi x)$ för godtyckliga konstanter a_n och b_n. Eftersom (1) är linjär får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)\big)\sin(n\pi x)\ .$$

Fourierkoefficienterna a_n bestäms från begynnelsevillkoret $u(x,0) = 0$ till

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

som ger $a_n = 0$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Fourierkoefficienterna b_n bestäms från begynnelsevillkoret

$$1 = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \big(-n\pi a_n \sin(n\pi 0) + n\pi b_n \cos(n\pi 0)\big)\sin(n\pi x)$$

till

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin(n\pi x)$$

vilket ger

$$n\pi b_n = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = 2[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\big(1 - (-1)^n\big)$$

och Fourierserien $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\big(1-(-1)^n\big)\sin(n\pi t)\sin(n\pi x)$.

3.(4 poäng) Formulera och motivera Parsevals relation för en Fourierserie. Bara formulering ger inga poäng och motivera betyder att härleda, t.ex. som i kurslitteraturen.

Se (1.20) i kapitel F1.3.