Institutionen för Matematik, KTH

Kontrollskrivning 3, Differentialekvationer II

22/4 2013, 8.15-10.00

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

(a) Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar; förklara symboler som införs; formulera given information i början låt sedan varje följande steg i ditt resonemang bygga på vad du skrivit tidigare; avsluta med en slutsats i en fullständig mening. Kursbokens presentation är en förebild, men inte lärarens förkortade skrivsätt på tavlan.

(b) Varning: Svar utan noggrann förklaring ger inga poäng.

Skrivningen har tre uppgifter. Lämna in lösningar till **högst två** *av dessa (om tre lämnas rättas de två sämsta). Fem poäng räcker för godkänd kontrollskrivning.*

1. (4 poäng) Bestäm lösningen $u(x,t)$ till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 2\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0\ , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}\ , \quad -\infty < x < \infty,$$

som beskriver konvektion av koncentrationen $u(x,t) \in \mathbb{R}$ vid tiden t i positionen x.

Låt $U(\omega,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ vara Fouriertransformen i x-led. Då ger Fouriertransformering i x-led av ekvationen

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} + 2i\omega U(\omega,t) = 0\,,$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$. Denna ordinära differentialekvation har lösningen

$$U(\omega,t) = A(\omega)e^{-2i\omega t}$$

och begynnelsevillkoret ger $U(\omega,0) = A(\omega)$, så $U(\omega,t) = U(\omega,0)e^{-2i\omega t}$. Inverstransformering med hjälp av translation ger svaret $u(x,t) = u(x-2t,0) = e^{-(x-2t)^2}$.

2.(4 poäng) Bestäm lösningen $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ till integralekvationen

$$\int_0^t \cos(\tau)y(t-\tau)d\tau = t\,, \quad t > 0\,.$$

Ekvationen kan lösas med Laplacetransformen $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$. *Vi har Laplacetransformerna (se BETA)*

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},$$
$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1},$$
$$\mathcal{L}\{\int_0^t \cos\tau\, y(t-\tau)d\tau\} = \frac{s}{s^2+1}Y(s)$$

som efter Laplacetransformering av integralekvationen ger ekvationen

$$\frac{s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s^2}\,,$$

vars lösning är

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3}.$$

Inverstransformering, med hjälp av transformerna $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ *för* $n = 0$ *och* $n = 2$, *ger svaret* $y(t) = 1 + t^2/2$.

3.(4 poäng) Visa att lösningen till differentialekvation $X'(t) = f(X(t))$ med givet begynnelsevärde $X(0) = X_0$ är entydig om f är Lipschitzkontinuerlig.