

## Laboration 2: Konstruera en optimal balk analytiskt

Avsikten med denna laboration är att:

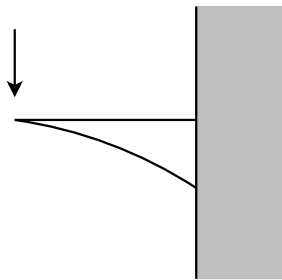
- lösa ett optimeringsproblem med en differentialkekvation som bivillkor,
- se ett exempel på att en differentialekvation kan användas på annat sätt än att bara bestämma lösningen för givna koefficienter - att konstruera en optimal balk är ett sådant exempel på ett inverst problem.

I denna laboration görs en analytisk optimering, med hjälp av vägledande frågor som ger en introduktion till en matematisk metod kallad variationskalkyl där man i någon mening hittar optimum genom att derivera med avseende på en funktion. Ett mål med laborationen är att förstå vad som menas med i "någon mening" i detta fall och hur det relaterar till klassiska derivator.

**2a.** Vi kan lösa vissa balkproblem analytiskt. Betrakta utböjningen  $u(x)$  av en balk som är fast inspänd vid  $x = 1$  och fri vid  $x = 0$  och antag att utböjningen  $u$  löser Bernoulli-Eulers ekvation

$$\begin{aligned}(b(x)u''(x))'' &= f(x), \quad x \in (0, 1) \\ u(1) = u'(1) &= b(0)u''(0) = (bu'')'(0) = 0\end{aligned}\tag{1}$$

med böjstyvheten  $b(x)$  och kraften  $f(x)$  per längdenhet.



Inspänd balk med varierande tjocklek.

Visa att

$$b(x)u''(x) = \int_0^x \int_0^s f(t) dt ds =: F(x)$$

och

$$u(0) = \int_0^1 \int_y^1 \frac{F(s)}{b(s)} ds dy = \int_0^1 \frac{sF(s)}{b(s)} ds.$$

**2b.** Förklara varför minimum av  $u(0)$  med bivillkoret  $\int_0^1 b(s)ds = 2$  ges av

$$\min_{\tilde{b}} \int_0^1 \frac{sF(s)}{2\tilde{b}(s)} ds \int_0^1 \tilde{b}(s) ds,$$

genom att sätta  $b(x) = 2\tilde{b}(x) / \int_0^1 \tilde{b}(s)ds$  där den positiva funktionen  $\tilde{b}$  kan väljas fritt. Ett alternativ till detta är att använda Lagranges metod för bivillkoret som i uppgift 1.

**2c.** Definiera, för en given funktion  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , funktionen  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  som

$$G(\epsilon) := \int_0^1 \frac{sF(s)}{\tilde{b}(s) + \epsilon v(s)} ds \int_0^1 \tilde{b}(s) + \epsilon v(s) ds.$$

Förklara varför

$$0 = G'(0) = - \int_0^1 \frac{sF(s)v(s)}{\tilde{b}^2(s)} ds \int_0^1 \tilde{b}(s) ds + \int_0^1 \frac{sF(s)}{\tilde{b}(s)} ds \int_0^1 v(s) ds$$

och att detta ger den optimal böjstyvheten

$$\frac{sF(s)}{\tilde{b}^2(s)} = \text{konstant} = C$$

och  $\tilde{b}(s) = \sqrt{sF(s)/C}$ .

**2d.** Vad är optimala lösningen för  $f = 1$ ?