Institutionen för Matematik, KTH

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen omfattar tre delar. Del I består av 5 uppgifter, som vardera kan ge högst 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning nr j ger automatiskt 3 poäng på uppgift nummer j $(j = 1, 2, 3)$ och godkänd redovisning och granskning ger 3 poäng på uppgift 4 *respektive* 5.

Del II består av 3 uppgifter, som vardera kan ge högst 4 poäng; det finns två alternativa uppgifter 10. Del III består av 2 uppgifter, som vardera kan ge högst 5 poäng.

Betygsgränser: E 15, D 18, C 22, B 26 och A 31 poäng. Minst 13 poäng, men ej godkänt, ger resultat FX, som innebär rätt till komplettering.

De som varit registrerade 2007 eller tidigare (med kursnummer 5B1207) får betyg 5, 4, 3, K eller U. Kraven för de fyra första är som för A, C, E respektive FX ovan.

1. Lös differentialekvationen

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)}$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 1/2$.

Ekvationen ger

$$\int y dy = \int x^2 dx$$

vars lösning är $y^2/2 = x^3/3 + C$. *Konstanten* C *bestäms av* $1/8 = y^2(0)/2 = C$, *vilket ger lösningen* $y(x) = \sqrt{x^3/3 + 1/8}$. *Den negativa roten är inte aktuell eftersom* $y(0)$ *är positiv.*

2. Bestäm temperaturen $u(x, t)$ i en stav, vid tiden t och positionen x, som uppfyller

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 1, \quad 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Svaret får anges som en Fourierserie.

Variabelseparationsmetodens ansats $u(x, t) = T(t)X(x)$ *ger i ekvationen*

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

så

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mathit{konstant} = \lambda\,.$$

Ekvationen $X''(x) = \lambda X(x)$ *och negativ* $\lambda = -\alpha^2$ *ger den karakteristiska ekvationen* $m^2 + \alpha^2 = 0$ *med lösningen* $m = \pm i\alpha$ *och*

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

för reella konstanter A, B. *Randvillkoren ger* $A = 0$ *och* $\sin(\alpha\pi) = 0$ *som har lösningen* $\alpha = n$ *för heltal* n. *Om* $\lambda \geq 0$ *har vi bara lösningen* $X = 0$. *Vi får*

$$T'(t) = -n^2 T(t)$$

så $T(t) = a_n e^{-n^2 t}$, *för någon konstant* a_n. *Variabelseparationsmetoden har gett oss lösningen*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\frac{a_n \pi}{2} = \int_0^{\pi} u(x,0)\sin(nx)dx = [\frac{\cos(nx)}{-n}]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n}$$

och Fourierserielösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n}\,\frac{2}{\pi}\, e^{-n^2 t}\sin(nx)\,.$$

3. Bestäm alla lösningar $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ till integralekvationen

$$\int_0^t y(t-\tau)y(\tau)d\tau = t^3\,, \quad t \geq 0\,.$$

Laplacetransformering (se BETA) ger

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{\int_0^t y(t-\tau)y(\tau)d\tau\} = Y^2(s)$$
$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

så ekvationen medför $Y^2(s) = 6/s^4$, *som har lösningarna* $Y(s) = \pm\sqrt{6}/s^2$. *Inverstransformen ger de två lösningarna* $y(t) = \pm\sqrt{6}\,t\,, \quad t > 0$.

4. Funktionen $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ löser differentialekvationen

$$x''(t) = -\sin x(t)\,, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1/10\,.$$

Linjärisera problemet kring $(x, x') = (0,0)$ och lös motsvarande linjäriserade problem.

Skriv problemet som ett system

$$x'(t) = y(t)$$
$$y'(t) = -\sin x(t)\,.$$

Jacobimatrisen blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

så högerledet i ekvationen har linjäriseringen

$$\begin{bmatrix} y \\ -\sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ o(|x|) \end{bmatrix}.$$

Det linjäriserade problemet blir med $z_1 \simeq x$ *och* $z_2 \simeq y$

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

med begynnelsedata $z_1(0) = 0$ *och* $z_2(0) = 1/10$.

Diagonalisering med hjälp av egenvärden λ *och egenvektorer leder till*

$$0 = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

så $\lambda = \pm i$.

Motsvarande egenvektorer blir:

$$\lambda = i: \quad 0 = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

och en lösning är $(a, b) = (1, i)$;

$$\lambda = -i: \quad 0 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

och en lösning är $(a, b) = (1, -i)$.

Lösningen till det linjäriserade problemet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = A\, Re\,(e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}) + B\, Im\,(e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

för godtyckliga reella konstanter A *och* B. *Begynnelsevärdet ger* $A = 0$ *och* $B = 1/10$.

5a. Låt $x'(t) = x(t)$. Visa att

$$\frac{d}{dt} u\big(t, x(t)\big) = \frac{\partial}{\partial t} u\big(t, x(t)\big) + x(t) \frac{\partial}{\partial x} u\big(t, x(t)\big)$$

för varje differentierbar funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5b. Bestäm $u(1,1)$ om $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ löser

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + x(t)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

med begynnelsedata $u(0,x) = e^{-x^2}$ för $x \in \mathbb{R}$, t.ex. genom att använda resultatet i uppgift a.

Kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dt}u\big(t,x(t)\big) = \frac{\partial}{\partial t}u\big(t,x(t)\big) + \frac{d}{dt}x(t)\frac{\partial}{\partial x}u\big(t,x(t)\big) = \frac{\partial}{\partial t}u\big(t,x(t)\big) + x(t)\frac{\partial}{\partial x}u\big(t,x(t)\big)\,.$$

Vi har lösningen $x(t) = x(0)e^t$ och vi söker den bana som har $1 = x(1) = x(0)e^1$ vilket ger $x(0) = e^{-1}$. Uppgift a visar att u är konstant längs banan $x(t)$, så

$$u(1,1) = u\big(1,x(1)\big) = u\big(0,x(0)\big) = e^{-x(0)^2} = e^{-e^{-2}}\,.$$

6. Betrakta differentialekvationen

$$\varphi''(t) = a\sin\varphi(t)\cos\varphi(t) - \sin\varphi(t) - \varphi'(t)$$

som beskriver vinkelutslaget $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ i en centrifugalregulator som roterar med konstant varvtal $a > 0$.

6a. Beskriv en metod att bestämma jämviktslösningar och dess stabilitet.

6b. Finns ett varvtal a med stabil jämviktslösning φ där $0 < \varphi < \pi/2$?

Skriv problemet som ett system

$$\begin{aligned}\varphi' &= \psi\\ \psi' &= a\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \psi\,.\end{aligned}$$

Jämviktslösningar uppfyller

$$\begin{aligned}0 &= \psi\\ 0 &= a\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi - \psi = \sin\varphi(a\cos\varphi - 1)\end{aligned}$$

vars lösning är

$$\psi = 0 \ \textit{och}\ \sin\varphi = 0$$

eller

$$\psi = 0 \ \textit{och}\ \cos\varphi = 1/a\,.$$

För att avgöra en jämviktspunkts stabilitet kan vi linjärisera kring jämviktspunkten och studera Jacobimatrisens egenvärden. Om båda egenvärden har negativ realdel är det en asymptotiskt stabil punkt. Om minst ett egenvärde har positiv realdel är det en instabil punkt. Om ett egenvärde har realdelen noll krävs en studie av det ickelinjära problemet för att avgöra stabilitet.

Låt $\cos\beta = 1/a$. *Vi har jämviktslösningarna* $\psi = 0$ *och*

$$\begin{aligned}\varphi &= n\pi\\ \varphi &= \beta + 2n\pi\\ \varphi &= \pi - \beta + 2n\pi\end{aligned}$$

för varje heltal n. *Om det ska finnas en lösning* $0 < \varphi < \pi/2$ *krävs att* $a > 1$ *så att* $0 < \beta = \varphi < \pi/2$. *Jacobianen blir*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\cos 2\varphi - \cos\varphi & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(2a^{-2} - 1) - 1/a & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/a - a & -1 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden är

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{a^2-1}{a}}\,.$$

Om $a > 1$ *är realdelen av dessa egenvärden negativ och jämviktspunkten är därmed asymptotisk stabil. Svar: Varvtal* $a > 1$ *ger en asymptotiskt stabil jämviktslösning vars vinkelutslag uppfyller* $0 < \varphi < \pi/2$.

7. När George Biddell Airy förklarade interferensfenomen i regnbågen 1838 löste han differentialekvationen

$$-u''(x) + x\,u(x) = 0$$

för $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med hjälp av Fouriertransformen. Bestäm Fouriertransformen av den lösning som uppfyller $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx = 1$.

Fouriertransformering av ekvationen ger

$$\omega^2 U(\omega) + iU'(\omega) = 0$$

och separering av variabler ger $\int \frac{dU}{U} = i\int \omega^2 d\omega$ *vars lösning är* $U(\omega) = Ce^{i\omega^3/3}$. *Vi har* $U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx = 1$, *så* $C = 1$ *och vi får svaret* $U(\omega) = e^{i\omega^3/3}$.

8. Antag att antalet fiskar $y(t)$ i ett bestånd vid tiden t med konstant fångst β per tidsenhet beskrivs av

$$y'(t) = \big(5 - y(t)\big)y(t) - \beta\,. \tag{1}$$

Bestäm långtidsbeteendet av fiskbeståndet beroende på $y(0)$ om $\beta = 4$, t.ex. med hjälp av stabilitetsanalys.

Låt $f(y) = (5-y)y - 4$. *Jämviktspunkterna* y *ges av* $f(y) = 0$ *som har lösningen*

$$0 = -y^2 + 5y - 4 = -(y - 5/2)^2 + 25/4 - 4$$

vilket ger

$$y = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

och $y = 4$ eller $y = 1$.

Vi har $f'(y) = -2y + 5$ så att $f'(4) = -3 < 0$. Därför är $y = 4$ asymptotiskt stabil. Vi har också $f'(1) = 3 > 0$ så $y = 1$ är en instabil jämviktspunkt. Vi får

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 4 \quad \text{om } y(0) > 1\,.$$

Vi har $y(t) = 0$ efter ändlig tid om $0 \le y(0) < 1$, ty $f(y) = -(y-1)(y-4) < 0$ så y är strikt avtagande.

Om $y(0) = 1$ förblir $y = 1$ för all tid.

9a. Antag att antalet fiskar $y(t)$ i ett bestånd vid tiden t med konstant fångst $\alpha\, y(t)$ per tidsenhet bestäms av den logistiska modellen

$$y'(t) = \big(5 - y(t)\big)y(t) - \alpha y(t)\,, \tag{2}$$

där α är en konstant relativ fångst. Bestäm långtidsbeteendet av $y(t)$. Kan beståndet dö ut?
9b. Bestäm $\alpha \in (0,\infty)$ så att fångsten per tidsenhet $\alpha\, y_p$ maximeras för en stabil jämviktslösning $y = y_p$.
9c. Antag att du är politiker och ska bestämma en fiskekvot. Skulle du välja relativ eller absolut kvot, d.v.s. ett värde på α i (2) eller ett värde på β i (1)? Motivera ditt svar utifrån maximal fångst och stabilt fiskbestånd för de logistiska modellerna (1) och (2).

a. *Låt $f(y) = (5-y)y - \alpha y$. Jämviktslösningar ges av*

$$0 = f(y) = (5-y)y - \alpha y = y(5 - \alpha - y)$$

så $y = 0$ eller $y = 5 - \alpha$. Vi har $f'(y) = 5 - \alpha - 2y$. Detta medför att $f'(0) = 5 - \alpha$ vilket är positivt om $\alpha < 5$ och negativt om $\alpha > 5$. Vi får också $f'(5-\alpha) = \alpha - 5$ som är positivt om $\alpha > 5$ och negativt om $\alpha < 5$.

Därför är $y = 0$ instabil och $y = 5 - \alpha > 0$ asymptotiskt stabil om $\alpha < 5$, så

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 5 - \alpha \text{ om } y(0) > 0.$$

Om $\alpha > 5$ är $y = 0$ asymptotiskt stabil och $y = 5 - \alpha < 0$ instabil, så

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \text{ om } y(0) \ge 0.$$

Med $\alpha > 5$ töms alltså beståndet på lång sikt.

Om $\alpha = 5$ har vi $y' = -y^2$ som ger $\int y^{-2}dy = -\int dt$ och $y = 1/(C+t)$. Konstanten C bestäms av $y(0) = 1/C$, så $y(t) = 1/\big(t + 1/y(0)\big) \to 0$ då $t \to \infty$.

b. *Jämviktspunkten $y_p = 5 - \alpha$ ger fångst $\alpha y_p = \alpha(5-\alpha)$ vilket har maximum för $\alpha = 5/2$ och då blir $\alpha y_p = 25/4$.*

c. *Den absoluta fångsten β ger jämviktsekvationen*

$$0 = f(y) = (5-y)y - \beta = -y^2 + 5y - \beta = -(y - 5/2)^2 + 25/4 - \beta$$

med lösningen $y = 5/2 \pm \sqrt{25/4 - \beta}$.

Om $\beta > 25/4$ saknas reella rötter och $f(y) < 0$ ger avtagande bestånd och fiskarna dör ut på ändlig tid.

Om $\beta < 25/4$ *har vi jämviktslösningarna* $y_\pm = 5/2 \pm \sqrt{25/4-\beta}$ *där* $f'(y_\pm) = \mp 2\sqrt{25/4-\beta}$. *Vi ser att* $f'(y_+) < 0$ *och* y_+ *är asymptotiskt stabil. Vi ser också att* $f'(y_-) > 0$ *och* y_- *är instabil.*

När $\beta \to 25/4$ *får vi ekvationen* $y' = -(y-5/2)^2$ *vars lösning (som för* $y' = -y^2$ *ovan) blir* $y(t) = 5/2 + 1/\big(t + 1/(y(0)-5/2)\big)$. *Om* $y(0) \geq 5/2$ *får vi* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 5/2$ *och om* $y(0) < 5/2$ *får vi* $y(t) = 0$ *efter ändlig tid* $t = \frac{4y(0)}{5(5-2y(0))}$.

När $\beta \to 25/4-$ *får vi maximal fångs per tidsenhet som är samma som med relativa kvoten* $\alpha = 5/2$. *Den absoluta kvoten* $\beta = 25/4$ *har nackdelen att beståndet dör ut om* $y(0) < 5/2$. *Den relativa fångsten* $\alpha = 5/2$ *ger maximal stabil fångst* $\alpha y_p = 25/4$ *per tidsenhet och* $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_p = 5/2$ *om* $y(0) > 0$. *Den relativa kvoten* $\alpha = 5/2$ *verkar därför fördelaktig i denna model eftersom fiskar och fiskare kan leva vidare oavsett beståndets storlek.*

10. Utböjningen $u(x,t)$, vid tiden t i positionen x, av en svängande sträng i ett visköst medium uppfyller

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) &= 0\,, \quad 0 < x < 1\,,\\
u(x,0) &= \sin(2\pi x)\,, \quad 0 < x < 1\,,\\
u(0,t) = u(1,t) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Bestäm utböjningen $u(x,t)$ för $x \in [0,1]$ och $t > 0$.

Variabelseparationsmetodens ansats $u(x,t) = X(x)T(t)$ *ger i ekvationen*

$$T''(t)X(x) + T'(t)X(x) = X''(x)T(t)$$

så

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \textit{konstant} = \lambda$$

Ekvationen $X''(x) = \lambda X(x)$ *och negativt* $\lambda = -\alpha^2$ *ger den karakteristiska ekvationen* $m^2 + \alpha^2 = 0$ *med lösningen* $m = \pm i\alpha$ *och*

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x), \qquad \textit{för reella konstanter } A, B.$$

Randvillkoren ger $A = 0$ *och* $\sin\alpha = 0$ *som har lösningen* $\alpha = n\pi$ *för heltal* n. *Om* $\lambda \geq 0$ *har vi bara lösningen* $X(x) = 0$.

Vi får då

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = -n^2\pi^2$$

med karakteristiska ekvationen $m^2 + m + n^2\pi^2 = 0$ *och rötterna* $m = -1/2 \pm i\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}$ *för* $n \geq 1$. *Detta ger* $T(t) = e^{-t/2}\big(a_n \cos(t\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\,) + b_n \sin(t\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\,)\big)$. *Variabelseparationsmetoden har gett oss lösningen*

$$u(x,t) = e^{-t/2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(t\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}) + b_n \sin(t\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4})\big)\sin(n\pi x)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = e^{-t/2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{1}{2}a_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\ t) - \frac{1}{2}b_n \sin(\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\ t)$$
$$+ \sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\big(-a_n \sin(\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\ t) + b_n \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4}\ t)\big)\Big)\sin(n\pi x)\,.$$

Begynnelsevillkortet $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$ *medför*

$$b_n\sqrt{n^2\pi^2 - 1/4} = a_n/2$$

och begynnelsevillkoret $u(x,0) = \sin(2\pi x)$ *ger*

$$a_n = b_n = 0 \text{ för } n \neq 2 \text{ och } a_2 = 1,\ b_2 = 1/(2\sqrt{4\pi^2 - 1/4}).$$

Vi får utböjningen

$$u(x,t) = e^{-t/2}\Big(\cos(\sqrt{4\pi^2 - 1/4}\,t) + \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - 1/4}}\sin(\sqrt{4\pi^2 - 1/4}\,t)\Big)\sin(2\pi x)\,.$$

Alternativ uppgift 10.(5 poäng) *Visa att lösningen till differentialekvation* $X'(t) = f(X(t))$ *med givet begynnelsevärde* $X(0) = X_0$ *är entydig om* f *är Lipschitzkontinuerlig. Formulera Grönwalls lemma om det används.*