Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen Differentialekvationer II SF1634 och 5B1207
20/8 2013

Beta Mathematical Handbook är tillåtet hjälpmedel.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Skrivningen omfattar tre delar. Del I består av 5 uppgifter, som vardera kan ge högst 3 poäng. Godkänd kontrollskrivning nr j ger automatiskt 3 poäng på uppgift nummer j ($j = 1, 2, 3$) och godkänd redovisning och granskning ger 3 poäng på uppgift 4 respektive 5.

Del II består av 3 uppgifter, som vardera kan ge högst 4 poäng; det finns två alternativa uppgifter 7. Del III består av 2 uppgifter, som vardera kan ge högst 5 poäng.

Betygsgränser: E 15, D 18, C 22, B 26 och A 31 poäng. Minst 13 poäng, men ej godkänt, ger resultat FX, som innebär rätt till komplettering. De som varit registrerade 2007 eller tidigare (med kursnummer 5B1207) får betyg 5, 4, 3, K eller U. Kraven för de fyra första är som för A, C, E respektive FX ovan.

1. Betrakta differentialekvationen $x''(t) - x(t) = 0,\ t > 0$, med begynnelsevillkoret $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

1a. Lös problemet med Laplacetransformen.

1b. Lös problemet med karakteristiska ekvationen.

1c. Skriv ekvationen som ett system och lös det som ett system.

Lösningar av denna uppgift kommer att bedömmas med 3 eller 0 poäng, så det är extra viktigt att räkna rätt.

(a) Laplacetransformen av ekvationen blir $s^2X(s) - 1 - X(s) = 0$ vilket ger

$$X(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$

vars inverstransform är $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

(b) Den karakteristiska ekvationen blir $m^2 - 1 = 0$, så $x(t) = ae^t + be^{-t}$. Begynnelsevillkoret ger $a + b = 0$ och $a - b = 1$, vars lösning är $a = -b = 1/2$ och vi får $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

(c) Ekvationen kan skrivas som systemet

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrisens egenvärden λ uppfyller $0 = \lambda^2 - 1$, så $\lambda = \pm 1$. Detta ger egenvektorekvationerna

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

vars lösning ger $b = \pm a$. Matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonaliserar problemet och vi får med

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

det diagonala systemet

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

vars lösning är $w_1 = c_1 e^t$ *och* $w_2 = c_2 e^{-t}$, *vilket ger* $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$. *Begynnelsevillkoret medför att* $x = (e^t - e^{-t})/2$.

2. Betrakta differentialekvationen

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2(t) + y^2(t) - 32, \\ y'(t) &= y(t) - x(t)\,. \end{aligned}$$

Bestäm jämviktslösningarna och avgör, om möjligt, om de är stabila eller instabila.

Vi ser att en jämviktspunkt (x, y) *har* $0 = y - x$, *så* $0 = x^2 + y^2 - 32 = 2x^2 - 32$, *vilket ger* $x = y = \pm 4$.

Problemet har Jacobianen

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

vilket ger egenvärden λ *som uppfyller:*

$$(x, y) = (4, 4): \quad 0 = (8 - \lambda)(1 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 9\lambda + 16 = (\lambda - 9/2)^2 + 16 - 81/4$$

så $\lambda = 9/2 \pm \sqrt{17}/2$. *Realdelen av dessa egenvärden är positiva. Eftersom minst ett av dem har positiv realdel är jämviktspunkten* $(4, 4)$ *instabil;*

$$(x, y) = (-4, -4): \quad 0 = (-8 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = \lambda^2 + 7\lambda - 16 = (\lambda + 7/2)^2 - 16 - 49/4$$

så $\lambda = -7/2 \pm \sqrt{16 + 49/4} > 0$. *Realdelen av dessa egenvärden har olika teckna och därför är jämviktspunkten* $(-4, -4)$ *instabil.*

3. Bestäm $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ som löser den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + u(x, t) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Låt $U(\omega, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$ *vara Fouriertransformen i* x*-led. Då ger Fouriertransformering i* x*-led ekvationen*

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} + i\omega U(\omega, t) + U(\omega, t) = 0\,,$$

för varje $\omega \in \mathbb{R}$. *Denna ordinära differentialekvation har lösningen*

$$U(\omega, t) = A(\omega) e^{-(1+i\omega)t}$$

och begynnelsevillkoret ger $U(\omega, 0) = A(\omega)$, *så* $U(\omega, t) = U(\omega, 0) e^{-t} e^{-i\omega t}$. *Inverstransformering med hjälp av translation ger svaret* $u(x, t) = e^{-t} u(x - t, 0) = e^{-t}/(1 + (x - t)^2)$.

4. Lös för $\mathbf{Y} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{Y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{Y}(t)\,, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Problemet kan lösas med diagonalisering. Matrisens egenvärden λ uppfyller

$$0 = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

vilket ger de tre egenvärdena $1,\ 2,\ 3$. *Egenvektorerna uppfyller*

$$\lambda = 1: \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \textit{så t.ex. } a = 1, b = c = 0,$$

$$\lambda = 2: \qquad 0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \textit{så t.ex. } c = 0, a = b = 1,$$

$$\lambda = 3: \qquad 0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \textit{så t.ex. } c = 1, a = b = 0.$$

Matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliserar problemet och vi får med variabelbytet $\mathbf{Y} = P\mathbf{w}$ *det diagonala systemet*

$$w_i' = iw_i$$

vars lösning är $w_i = c_i e^{it}$ *för* $i = 1, 2, 3$. *Begynnelsevillkoret ger*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och $c_3 = 3, c_2 = 2, c_1 = -1$. *Svar:*

$$\mathbf{Y}(t) = -e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Antag att $(x+1)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0\,, \quad x > 0$. En lösning till denna ekvation är $y(x) = e^{-x}$. Bestäm den allmänna lösningen.

Variabelbytet $y(x) = e^{-x}z(x)$ *ger ekvationen*

$$(z'' - 2z' + z)(x+1) + (-z + z')x - z = 0$$

och

$$(x+1)z'' + (-x-2)z' = 0\,,$$

som kan integreras med $v = z'$*:*

$$(x+1)v' = (x+2)v.$$

Denna ekvation har lösningen

$$\log v(x) = \int \frac{dv}{v} = c + \int \frac{x+2}{x+1}dx = c + x + \log(1+x)$$

vilket ger $z' = Ce^x(x+1)$ *och* $z(x) = Ce^x x + D$*. Den allmänna lösningen är* $y(x) = De^{-x} + C(x+1)$ *för godtyckliga reella konstanter* C, D*.*

6. En termometer tas inifrån ett rum och ut där temperaturen är 5 grader. Efter 1 minut avläses 15 grader och efter 2 minuter avläses 10 grader. Vad är rummets temperatur? Antag att Newtons avsvalningslag gäller, d.v.s. att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen mellan termometern och omgivningen.

Låt termometerns temperatur vara $T(t)$*. Då gäller*

$$T'(t) = \alpha\big(5 - T(t)\big)$$

vilket ger

$$\int \frac{dT}{T-5} = -\int \alpha dt$$

och $\log(T-5) = -\alpha t + c$*. Vi får* $T(t) = 5 + Ce^{-\alpha t}$ *och villkoren*

$$T(1) = 15 = 5 + Ce^{-\alpha}$$

$$T(2) = 10 = 5 + Ce^{-2\alpha}$$

vars lösning är $e^\alpha = 2$ *och* $C = 20$*. Svar: Temperaturen i rummet är* 25 *grader.*

7. Bestäm en kontinuerlig funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ som är styckvis deriverbar och uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d}{dx}y(x) + 2xy(x) = f(x), \text{ för } x > 0, \text{ där } f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \ge 1, \end{cases}$$

och $y(0) = 2$.

Metoden med integrerande faktor ger

$$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}f(x)$$

och

$$e^{x^2}y(x) - 2 = \int_0^x e^{z^2}f(z)dz = \begin{cases} e^{x^2} - 1 & 0 < x < 1 \\ e^1 - 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

så

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x^2}+1 & 0<x<1 \\ (e^1+1)e^{-x^2} & x \geq 1 \,. \end{cases}$$

Alternativ uppgift 7. Formulera och motivera Parsevals relation för en Fourierserie.

8. Bestäm temperaturen $u(x,t)$ i en stav, vid tiden t och positionen x, som uppfyller

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t>0, \\ \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) &= 0, \quad t>0, \\ u(x,0) &= x, \quad 0<x<1\,. \end{aligned}$$

Svaret får anges som en Fourierserie.

Med hjälp av variabelseparationsmetoden och ansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ får vi ekvationen

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \tag{1}$$

och efter division med TX

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Vi ser att vänsterledet är en funktion av bara t och högerledet är en funktion av x, vilket bara är möjligt om funktionen är konstant, så $\frac{X''(x)}{X(x)}$ = konstant vilket tillsammans med randvillkoren $X(0) = X'(1) = 0$ ger de nollskilda lösningarna $X(x) = \sin((n+1/2)\pi x)$ för $n = 1,2,3,\ldots$. Insatt i ekvationen ger det

$$T'(t) = -(n+1/2)^2\pi^2 T(t)$$

vars lösning är $T(t) = T(0)e^{-(n+1/2)^2\pi^2 t}$. Eftersom värmeledningsekvationen är linjär får vi

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(n+1/2)^2\pi^2 t}\sin((n+1/2)\pi x)\ .$$

Fourierkoefficienterna a_n bestäms av begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin((n+1/2)\pi x)$$

och ortogonaliteten, $\int_0^1 \sin((n+1/2)\pi x)\sin((m+1/2)\pi x)dx = 0$ för $n \neq m$, till

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 u(x,0)\sin((n+1/2)\pi x)dx = 2\int_0^1 x\sin((n+1/2)\pi x)dx \\ &= 2[-x\frac{\cos(n+1/2)\pi x}{(n+1/2)\pi}]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(n+1/2)\pi x}{(n+1/2)\pi}dx = \frac{2(-1)^n}{(n+1/2)^2\pi^2}\,. \end{aligned}$$

Temperaturen i staven blir $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n+1/2)^2\pi^2} e^{-(n+1/2)^2\pi^2 t} \sin((n+1/2)\pi x)$.

9. Bestäm ett villkor för den reella konstanten μ så att jämviktslösningen $(0,0)$ är en stabil spiral i det linjära systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -x(t) + \mu y(t)\,. \end{aligned}$$

Systemet har Jacobianen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

med egenvärdesekvationen

$$0 = -\lambda(\mu - \lambda) + 1 = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = (\lambda - \mu/2)^2 + 1 - \mu^2/4$$

så $\lambda = \mu/2 \pm \sqrt{\mu^2 - 4}/2$. *En stabil spiral betyder att realdelen av egenvärdena är negativa och att imaginärdelen är skild från noll, vilket är uppfyllt för* $-2 < \mu < 0$.

10. Låt $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en lösning till Burgers ekvation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + u(t,x) \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

som är en modell för kompressibel strömning. Anta att för $t > 0$ gäller randvillkoren

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} u(t,x) &= -1, \\ \lim_{x\to-\infty} u(t,x) &= 1. \end{aligned}$$

Bestäm den stationära lösningen (som uppfyller $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = 0$); denna lösning kallas för en stötvåg. Visa också att det inte finns en stationär lösning där

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} u(t,x) &= 1, \\ \lim_{x\to-\infty} u(t,x) &= -1. \end{aligned}$$

Ekvationen kan skrivas

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2(t,x)}{2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

vilket med $u(x,t) = f(x)$ *ger ekvationen för en stationär lösning*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f^2(x)}{2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Integration från $-\infty$ *till* x *ger med randvillkoret* $f(-\infty) = 1$ *och* $f'(-\infty) = 0$

$$\frac{f^2(x) - 1}{2} = \frac{\partial}{\partial x} f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

och separation av variabler visar att

$$\int \frac{1}{1-f} + \frac{1}{1+f} df = -4 \int dx$$

vars lösning är $\log \frac{1+f}{1-f} = -4x$ *med hjälp av randvillkoren* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp 1$. *Detta ger*

$$f(x) = \frac{e^{-4x}-1}{e^{-4x}+1} = \frac{e^{-2x}-e^{2x}}{e^{-2x}+e^{2x}} = -\tanh(2x).$$

Om $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$ *få vi fortfarande* $\log \frac{1+f}{1-f} = -4x + C$, *vilket inte har någon lösning i detta fall. En alternativ förklaring är att* (2) *visar att* f *är avtagande för* $|f| < 1$, *vilket inte är kompatibelt med randvillkoren.*