KTH Matematik
F J Čech

B

Kontrollskrivning 1, version B,
i SF1635 Signaler och system I.
måndag 3 december 2012, klockan 10.15–11.15

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

Vi vet att $x(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} X(\omega)$ och börjar med $f(t) = x(t+3) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\omega) = \mathrm{e}^{i3\omega}X(\omega)$ och $f(2t) = x(2t+3) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)$ och till slut bestämmer vi

$$y(t) = \mathrm{e}^{-i4t}x(2t+3) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega+4}{2}\right) \tag{1}$$

som leder till svaret

$$\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{-i4t}x(2t+3) \xrightarrow{\mathfrak{F}} Y(\omega) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega+4}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i3\frac{\omega+4}{2}}X\left(\frac{\omega+4}{2}\right)}$$

Det går naturligtvis utmärkt att beräkna $Y(\omega)$ direkt med Fouriertransformens definitionsintegral. Studera

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i4t}x(2t+3)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = \langle 2t+3=\tau\rangle = && (2)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\tau-3}{2}\right)(\omega+4)}x(\tau)\frac{d\tau}{2} = && (3)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{i3}{2}(\omega+4)}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\tau\left(\frac{\omega+4}{2}\right)}x(\tau)d\tau = && (4)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{i3}{2}(\omega+4)}X\left(\frac{\omega+4}{2}\right)\ldots\text{samma som ovan} && (5)
\end{aligned}$$

2) Lösning

Om vi skriver H.L. i texten som

$$f(t) = t\mathcal{U}(t) - \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

får vi

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}\right) \tag{7}$$

samt $\mathscr{L}$-transformen av den givna differentialekvationen med $y(0) = y'(0) = 0$ ger

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{1}{s^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}\right) \tag{8}$$

Då får vi lösningen i s-planet

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}\right) = G(s)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}s}\right) \tag{9}$$

där en partialbråksuppdelning av $G(s)$ leder till

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right) \tag{10}$$

och inverstransformen ger

$$g(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) \tag{11}$$

Tillämpad i ekv(9) får vi slutligen svaret

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathcal{U}(t) + \frac{1}{4}\left(\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin 2(t - \frac{\pi}{2})\right)\mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2})}$$