KTH Matematik

SF1635, Signaler och system I

Tentamen tisdagen 2012-12-11, kl $14^{00} - 19^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.
"Formelsamling i Signalbehandling" (rosa),
"Formelsamling för Kursen SF1635" (ljusgrön).

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Förenkla svaren så långt som möjligt!
Ange vad införda beteckningar, som inte är standard, står för.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Obs 3: Tentamen består av 6 uppgifter, vilka sammanlagd ger 50 poäng.
Efter tentamens slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Obs 4: Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	FX	
krävs	40	36	32	28	24	20	poäng (inkl bonus)

FX innebär rätt att skriva en kompletteringsskrivning för betyg E.
Tid och plats för den meddelas senare vid behov.

Ansvarig: Franz J Čech

---

1) Bestäm lösningen till

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = 24x, \quad x > 0$$

uppfyllande $y(1) = 2$, $y'(1) = 6$ och där vi vet att $y_1(x) = x^{-1}$ är en lösning till den homogena ekvationen. [8p]

---

v g v

2) Bestäm den reella lösningen till nedanstående begynnelsevärdesproblem [4p]

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{X}(t) \text{ med } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skissa också ett kvalitativt riktigt **fasporträtt** för systemet.
Porträttet skall innehålla banorna genom (-1,0), (1,0) och (1,1) samt en pil som visar åt vilket håll de genomlöps respektive, då t växer. [2p]
Ange också karaktären av systemets enda kritiska punkt. [1p]

---

3) Det finns en konstant A så att $f(t) = t^2 - 2\pi t + A, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$,
har cos-utvecklingen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nt.$$

a) Bestäm värdet på A, [4p]

b) Ange värdet av $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ med hjälp av a). [4p]

---

4) Ett LTI-system har pulssvaret

$$h(t) = \delta(t) - 3\mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t)$$

Bestäm utsignalen $y(t)$ för $-\infty < t < \infty$ om insignalen är

$$x(t) = \mathcal{U}(-t)$$

$\mathcal{U}(t)$ är Heaviside funktionen.
För full poäng krävs en tydlig skiss av $y(t)$. [7p]

---

5) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet [10p]

$$y'' + 2y' + 2y = \mathcal{U}(t-\pi) + 3\,\delta(t-2\pi), \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$$

---

6) Signalen $x(t)$ har fouriertransformen $X(f)$, med f i Hz,

$$X(f) = \begin{cases} 0, & |f| > 3; \\ 1, & |f| < 1; \\ \frac{1}{2}(3 - |f|), & 1 < |f| < 3. \end{cases}$$

a) Signalen samplas med $f_s = \frac{1}{T} = 2$ Hz.
Rita signalens fouriertransform $Y(f)$ efter rekonstruktion med ett idealt LP-filter $H_{rek}(f)$ med bandbredden $B = 1$ Hz och höjden T. [4p]

b) Signalen samplas nu med $f_s = \frac{1}{T} = 3$ Hz.
Rita signalens fouriertransform $Y(f)$ efter rekonstruktion med ett idealt LP-filter med bandbredden $B = 1,5$ Hz och höjden T. [6p]

Endast tydliga figurer godtas som svar.

Lycka till !

Franz J