SF1635, Signaler och system I

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2012–12–11

1) Lösning

1. Vi börjar som vanligt med att skriva ODE'n på standardform

$$y'' + \frac{7}{x}\,y' + \frac{5}{x^2}\,y = \frac{24}{x}, \quad x > 0 \tag{1}$$

2. Därefter ansätter vi

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^{-1} \tag{2}$$

och kollar om vi får kanske den andra fundamentallösningen på köpet! Då slipper vi att först bestämma den andre lösningen y_2 till den homogena DE och därefter ansätta $y_{part} = u_1y_1 + u_2y_2$ osv.

3. Med ansatsen ekv(2) fås: $y_2' = u'x^{-1} - ux^{-2},\ y_2'' = u''x^{-1} - u'x^{-2} - u'x^{-2} + u2x^{-3}$
Insättning och förkortning av vissa termer ger

$$u'' + \frac{5}{x}u' = 24 \tag{3}$$

som har den integrerande faktorn $p = x^5$ som i sin tur ger sambandet

$$\left(u'\,x^5\right)' = 24x^5 \implies u'\,x^5 = \frac{24x^6}{6} + C_1 \implies u = 2x^2 + \frac{C_2}{x^4} + C_3 \tag{4}$$

och till sist, m h a ekv(2), den allmänna lösningen

$$y_2 = y = 2x + \frac{C_2}{x^5} + \frac{C_3}{x} \tag{5}$$

4. Detta samband indikerar att x^{-5} måste vara den andra fundamentallösningen till den homogena DE.
Återstår att visa att dessa 2 lösningar inte är linjärt beroende av varandra, vilket vi gör m h a Wronski determinanten,

$$\begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-5} \\ -x^{-2} & -5x^{-6} \end{vmatrix} = -4x^{-7} \neq 0, \forall x \neq 0, \quad \text{klart} \tag{6}$$

5. Sätter vi nu in villkoren $y(1) = 2,\ y'(1) = 6,$ i ekv(5) får vi $C_2 = -1,\ C_3 = 1$ och det slutgiltiga svaret

$$\boxed{y(x) = 2x - \tfrac{1}{x^5} + \tfrac{1}{x}, \quad x > 0}$$

2) Lösning

i) Egenvärden fås m h a sambanden:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+\frac{5}{4} = 0 \tag{7}$$

som ger egenvärdena $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$ som i sin tur via $(\mathbf{A}-\lambda_\mathbf{1}\mathbf{I})\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ ger

ii) egenvektorern $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*$ och i slutändan till $\mathrm{X}_2(t) = \mathrm{X}_1^*(t)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}+i) & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \tag{8}$$

$$\Longrightarrow -iv_{11}+v_{12} = 0, \quad \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{9}$$

iii) Allt detta resulterar i fundamentallösningen $\mathbf{X}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1$ m a o

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}+it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) \tag{10}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{11}$$

iv) Härmed får vi nu den allmänna lösningen i matrisform

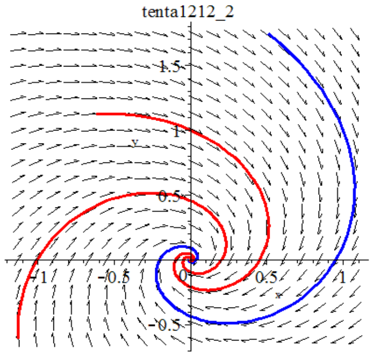
$$\mathbf{X}(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + b\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{12}$$

v) Sist bestämmer vi lösningen genom (1,1):
Med $t = 0$ insatt i ekv(12) fås sambanden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{13}$$

och vi får slutsvaret $\boxed{\mathbf{X}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}}$

Figuren nedan ger vid handen att origo representerar en stabil spiralpunkt.



OBS: Det går naturligtvis utmärkt att lösa problemet m h a $\mathscr{L}-$transformen.

3) Lösning

a) Man observerar att $b_n = 0, \forall n, a_0 = 0$, d v s om $f(t)$ utvidgas $2\pi-$periodiskt $\forall t$ skall f vara jämn och a_0 skall vara 0, m a o

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \quad \Longrightarrow \\ 0 &= \int_0^{2\pi} t^2 - 2\pi t + A\,dt = \cdots = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi^3 + A\,2\pi \end{aligned}$$

ger svaret: $\boxed{A = \frac{2\pi^2}{3}}$

b) f är uppenbart kontinuerlig $\forall t$, då sätter vi $t = 0$ och får

$$\frac{2\pi^2}{3} = f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos n0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \tag{14}$$

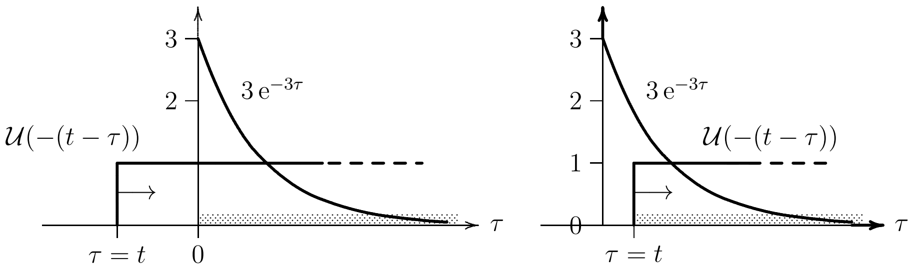
leder till $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{2\pi^2}{3}$ och svaret blir: $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

4) Lösning

Vi använder faltning och börjar med

$$y(t) = \left(\delta(t) - 3e^{-3t}\right) * \mathcal{U}(-t) = \mathcal{U}(-t) - 3e^{-3t} * \mathcal{U}(-t)$$

Så, allt vi behöver göra är att beräkna $y_1(t) = 3e^{-3t} * \mathcal{U}(-t)$



Vi har alltså 2 fall, se figur ovan: $t < 0$ och $t > 0$.

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= 3\mathrm{e}^{-3t} * \mathcal{U}(-t) && (15)\\
&= \int_0^\infty 3\mathrm{e}^{-3\tau} d\tau = 1, \quad t < 0 && (16)\\
&= \int_t^\infty 3\mathrm{e}^{-3\tau} d\tau = \mathrm{e}^{-3t}, \quad t > 0 && (17)\\
&= \mathcal{U}(-t) + \mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t) && (18)
\end{aligned}
$$

Härmed får vi

$$
y(t) = \mathcal{U}(-t) - y_1(t) = \mathcal{U}(-t) - \mathcal{U}(-t) - \mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t) \tag{19}
$$

som ger svaret $\boxed{y(t) = -\,\mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t)}$

Det går naturligtvis också att använda Fourier-transformen om vi observerar att

$$
h(t) = \delta(t) - 3\mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}} \quad H(\omega) = 1 - \frac{3}{3 + i\omega} \tag{20}
$$

$$
x(t) = \mathcal{U}(-t) \quad \xrightarrow{\mathfrak{F}} \quad X(\omega) = \frac{-1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega) \tag{21}
$$

vilket innebär att vi studerar

$$
Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} y(t) \tag{22}
$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) &= \left(1 - \frac{3}{3 + i\omega}\right)\left(\frac{-1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right) = && (23)\\
&= \frac{i\omega}{3 + i\omega}\,\frac{-1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega) - \frac{3\pi\,\delta(\omega)}{3 + i\omega} = && (24)\\
&= \cdots = -\,\frac{1}{3 + i\omega} && (25)
\end{aligned}
$$

Inverstransformering, tabellslagning, ger självklart samma svar

$$
\boxed{y(t) = -\,\mathrm{e}^{-3t}\mathcal{U}(t)}
$$

5) Lösning

$\mathscr{L}$-transformen av den givna ODE leder till

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 2Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s} + 3\,\mathrm{e}^{-2s\pi} \tag{26}$$

Insättning av begynnelsevärden ger

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) - s - 2 = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s} + 3\,\mathrm{e}^{-2s\pi} \tag{27}$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s((s+1)^2+1)} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-2s\pi}}{(s+1)^2+1} + \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \tag{28}$$

och nu ger BETA, resp FS(rosa)

$$\frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \sin t, \qquad \frac{1}{(s+1)^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{e}^{-t}\sin t \tag{29}$$

$$\frac{s+1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \cos t + \sin t, \qquad \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t) \tag{30}$$

$$\frac{1}{s((s+1)^2+1)} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\right], \quad \text{rosa FS, s12(5.34)} \tag{31}$$

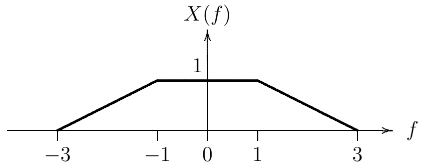
$$\mathrm{e}^{-Ts}F(s) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} f(t-T)\mathcal{U}(t-T) = \begin{cases} f(t-T), & t > T \geqq 0; \\ 0, & t < T. \end{cases} \tag{32}$$

Insättning av dessa samband i ekv(28) resulterar i svaret

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}\mathcal{U}(t-\pi)\left[1 - \mathrm{e}^{-(t-\pi)}(\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi))\right] \\ &\quad + 3\mathcal{U}(t-2\pi)\mathrm{e}^{-(t-2\pi)}\sin(t-2\pi) + \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\mathcal{U}(t) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{U}(t-\pi)\left[1 + \mathrm{e}^{-(t-\pi)}(\cos t + \sin t)\right] \\ &\quad + 3\mathcal{U}(t-2\pi)\mathrm{e}^{-(t-2\pi)}\sin t + \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin t)\mathcal{U}(t) \end{aligned}}$$

6) Lösning

Grafen för transformen ges av följande figur



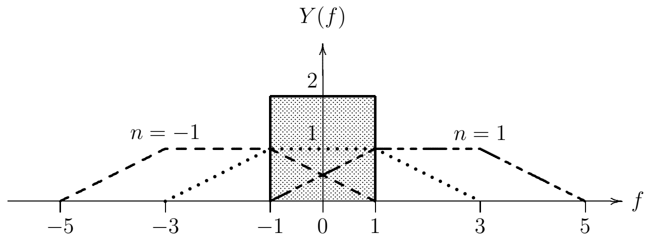
a) Den samplade signalens $\mathfrak{F}$-transform ges av

$$X_s(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s), \tag{33}$$

där $T = 0,5$ s och som efter $H_{rek}(f) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$ leder till utsignalen

$$Y(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \tag{34}$$

som representeras av den skuggade ytan i figuren nedan:



b) Man gör här på samma sätt som i a) utom att $H_{rek}(f) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{3}\right)$.
Även här representeras $Y(f)$ av den skuggade ytan i nedanstående figur: